重庆南开中学高2022级高三（上）数学测试（9.15）参考答案

一、单选题：

ACBC　BCCB

二、多选题：

ACD　BC　ABC　ACD

三、填空题：

13. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　14. 1　　15. $\dfrac{1}{5}$　　16. $(-\infty,-2]\cup(-1,-\dfrac{3}{4})$

四、解答题

17. 解：（1）由题 $2x^2+bx+c-20<0$ 的解集是 $(-4,1)$，$\therefore -4$ 和 1 是方程 $2x^2+bx+c-20=0$ 的两个根．由韦达定理可得 $\begin{cases}-\dfrac{b}{2}=-3\\ \dfrac{c-20}{2}=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=6\\c=12\end{cases}$，$\therefore g(x)=2x^2+6x+12$

（2）$4\sqrt{6}+6\le m<17$

18. 解：（1）因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，即 $2-2a+(b-a)(4^x+4^{-x})=0$ 恒成立，所以 $b-a=2-2a=0$，解得 $a=b=1$；

（2）不等式 $mf(x)-f(\dfrac{x}{2})>0\Leftrightarrow m\cdot\dfrac{4^x+1}{4^x-1}-\dfrac{2^x+1}{2^x-1}>0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

令 $t=2^x>1$，则 $m>\dfrac{\frac{t+1}{t-1}}{\frac{t^2+1}{t^2-1}}=\dfrac{(t+1)^2}{t^2+1}=1+\dfrac{2t}{t^2+1}=1+\dfrac{2}{t+\frac{1}{t}}$ 对 $t>1$ 恒成立，

因为函数 $y=\dfrac{2}{t+\frac{1}{t}}$ 在 $t>1$ 时递减，所以 $m\ge2$．

19. 解：（1）$g(x)=x-\sin x$，$g'(x)=1-\cos x\ge0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，　3 分

$g(x)_{\min}=g(0)=0, g(x)_{\max}=g(\pi)=\pi$；……5 分

（2）$h(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{1}{6}x^3+ax-x+\sin x$，$h'(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\cos x+a-1$，……7 分

因为 $h(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h'(x)\ge0$ 恒成立，……8 分

$h''(x)=x-\sin x$，由（I）知 $h''(x)=x-\sin x$ 递增，……10 分

所以，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)>h'(0)=a$，故 $a\ge0$……12

20. 解：（1）由频率分布直方图知，成绩在[50,60)频率为

$1-(0.0400+0.0300+0.0125+0.0100)\times 10=0.075$，

∵成绩在[50，60）内频数为 3，∴抽取的样本容量 $n=\dfrac{3}{0.075}=40$，

∴参赛人员平均成绩为 $55\times 0.075+65\times 0.3+75\times 0.4+85\times 0.125+95\times 0.1=73.75$.

（2）由频率分布直方图知，抽取的人员中成绩在[80，90）的人数为 $0.0125\times 10\times 40=5$，成绩在[90，100]的人数为 $0.0100\times 10\times 40=4$，

∴X 的可能取值为 0，1，2，3，4，

∴$P(X=0)=\dfrac{C_3^2C_2^2}{C_5^2C_4^2}=\dfrac{1}{20}$；$P(X=1)=\dfrac{C_2^1C_3^1C_2^2+C_3^2C_2^1C_2^1}{C_5^2C_4^2}=\dfrac{3}{10}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_2^2C_2^2+C_2^1C_3^1C_2^1C_2^1+C_3^2C_2^2}{C_5^2C_4^2}=\dfrac{7}{15}$，$P(X=3)=\dfrac{C_2^2C_2^1C_2^1+C_3^1C_2^1C_2^2}{C_5^2C_4^2}=\dfrac{1}{6}$，

$P(X=4)=\dfrac{C_2^2C_2^2}{C_5^2C_4^2}=\dfrac{1}{60}$.

∴X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{60}$

∴$E(X)=0\times\dfrac{1}{20}+1\times\dfrac{3}{10}+2\times\dfrac{7}{15}+3\times\dfrac{1}{6}+4\times\dfrac{1}{60}=\dfrac{9}{5}$.

21. 解：（1）设点 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{PF}=(-x,1-y),\overrightarrow{OF}=(0,1)$，……1 分

由 $|\overrightarrow{PF}|=|\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{OF}|$，得 $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=|1-y|$，……2 分，整理，得 $\Gamma: x^2=4y$……4 分

(2) (i) 设 $AB: y=kx+4, A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), P(x_0,y_0)$，则 $x_1^{\ 2}=4y_1, x_2^{\ 2}=4y_2$

联立直线 AB 与抛物线 Γ：$\begin{cases} y=kx+4 \\ x^2=4y \end{cases} \Rightarrow x^2-4kx-16=0$，所以 $x_1+x_2=4k, x_1x_2=-16$；……5 分

由 $y=\dfrac{1}{4}x^2$，求导得 $y'=\dfrac{1}{2}x$，切线 $PA: y-y_1=\dfrac{x_1}{2}(x-x_1)$ ，即 $y=\dfrac{x_1}{2}x-\dfrac{x_1^2}{4}$，

同理，切线 $PB: y=\dfrac{x_2}{2}x-\dfrac{x_2^2}{4}$，……6 分，

联立 PA,PB 可得 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=2k,y_0=\frac{x_1x_2}{4}=-4$ …7 分

即 $P(2k,-4)$，所以，点 P 在条定直线 $y=-4$ 上……8 分

(ii) $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=4\sqrt{1+k^2}\sqrt{k^2+4}$，……9 分，

设 O,P 到直线 AB 的距离为 d_1,d_2

则 $d_1=\frac{4}{\sqrt{1+k^2}},d_2=\frac{|kx_0-y_0+4|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2(k^2+4)}{\sqrt{1+k^2}}$……10 分

$S_1+S_2=S_{PAB}-S_{OAB}=\frac{1}{2}|AB|(d_2-d_1)=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{1+k^2}\sqrt{k^2+4}\cdot\left(\frac{2(k^2+4)}{\sqrt{1+k^2}}-\frac{4}{\sqrt{1+k^2}}\right)=4\sqrt{k^2+4}\cdot(k^2+2)$

……11 分，

关于 k^2 递增，显然，当 $k=0$ 时，取得最小值 $(S_1+S_2)_{\min}=16$……12 分

22.解：(1) $f(x)=\frac{1}{m}e^{mx}-\frac{1}{2}x^2,f'(x)=e^{mx}-x$

令 $g(x)=f(x)+f(-x)=e^x+e^{-x}-x^2$，则 $g'(x)=e^x-e^{-x}-2x$，……1 分，

$g''(x)=e^x+e^{-x}-2\ge0$，

所以 $g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，……2 分，

所以 $g'(x)\ge g'(0)=0$，$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增；…3 分

所以 $x\in[0,+\infty)$ 时，$g(x)\ge g(0)=2$，即 $x\in R$ 时，$g(x)\ge2$……4 分

(2) $\frac{mx(mx-6)+2f'(x)}{\ln x}\ge\ln x-6\Leftrightarrow(mx)^2-6mx+2(e^{mx}-x)\ge(\ln x-6)\cdot\ln x$

$\Leftrightarrow(mx)^2-6mx+2e^{mx}\ge(\ln x)^2-6\ln x+2x\Leftrightarrow(mx)^2-6mx+2e^{mx}\ge(\ln x)^2-6\ln x+2e^{\ln x}$ ①

令 $h(x)=x^2-6x+2e^x$，则①式等价于 $h(mx)\ge h(\ln x)$，……7 分

$h'(x)=2x-6+2e^x=2(x-3+e^x)$，当 $x>1$ 时，$h'(x)=2(x-3+e^x)>2(1-3+e)>0$

又因为 $m>1$，$x\in(e,+\infty)$，，所以 $mx>1,\ln x>1$，

所以 $h(mx)\ge h(\ln x)\Leftrightarrow mx\ge\ln x\Leftrightarrow m\ge\frac{\ln x}{x}$，……9 分

令 $\phi(x)=\frac{\ln x}{x}(x>1)$，$\phi'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

所以$\phi(x)$在$(1,e)$递增，在$(e,+\infty)$递减，所以$\phi(x)\le\phi(e)=\frac{1}{e}$，故$m\ge\frac{1}{e}$……11 分

综上，$m>1$……12 分

+2)