保密★使用前

泉州市2023届高三适应性练习卷

2023.05

一、二 选择题答案

1-8 DACB ACBB

9.ACD 10.AC 11.AD 12.BCD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．曲线$y=\sin 2x$在点$(0,0)$处的切线方程为________.

【命题意图】本小题主要考查导数的几何意义等基础知识；考查运算求解等；体现基础性，导向对数学运算等核心素养的关注.

【试题解析】因为$y=\sin 2x$，所以$y'=2\cos 2x$，所以$y'|_{x=0}=2$，可得曲线$y=\sin 2x$在点$(0,0)$处的切线方程为：$y=2x$.

14．已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$满足：$f(x+2)$为偶函数；当$x\in(-\infty,2]$时，$f(x)=x^2$．写出$f(x)$的一个单调递增区间为________.

【命题意图】本小题主要考查函数的对称性和单调性等基础知识；考查推理论证能力等；考查数形结合思想、化归与转化思想等，体现基础性，导向对直观想象等核心素养的关注.

【试题解析】因为$f(x+2)$为偶函数，所以$f(x+2)=f(-x+2)$，

因此$f(x)$的图象关于直线$x=2$对称.

当$x\in(-\infty,2]$时，$f(x)=x^2$，所以$f(x)$在$(-\infty,0]$单调递减，在$[0,2]$单调递增.

由对称性，可得$f(x)$在$[2,4]$单调递减，在$[4,+\infty)$单调递增.

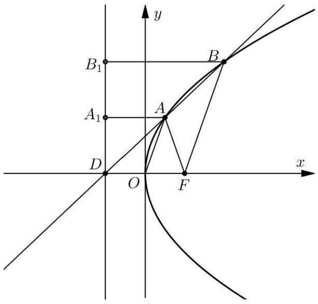
故$f(x)$的一个单调递增区间为$[0,2]$，$[4,+\infty)$.

注：只要写出一个答案就可以，同时区间端点除$+\infty$处只能用开区间外，其他的用开闭符号都可以。

15．在平面直角坐标系xOy中，已知抛物线$C:y^2=6x$的焦点为F，过$D(-\frac{3}{2},0)$的直线l与C交于A,B两点．若$\triangle ABF$的面积等于$\triangle OAD$的面积的2倍，则$\frac{|AF|}{|BF|}=$________.

【命题意图】本小题主要考查抛物线的定义及标准方程、直线与抛物线的位置关系等基础知识；考查运算求解等；考查数形结合思想、化归与转化思想等，体现基础性，导向对数学运算、直观想象等核心素养的关注.

【试题解析】由题意，知抛物线$C:y^2=6x$的焦点$F(\frac{3}{2},0)$，准线$l:x=-\frac{3}{2}$. 设O,F到直线AB的距离分别为d_1,d_2，则$\frac{d_2}{d_1}=\frac{|DF|}{|DO|}=2$，又$S_{\triangle OAD}=\frac{1}{2}\times|DA|\times d_1$，$S_{\triangle FAB}=\frac{1}{2}\times|AB|\times d_2$，从而$\frac{S_{\triangle FAB}}{S_{\triangle OAD}}=\frac{|AB|\times d_2}{|DA|\times d_1}=2$，所以$|DA|=|AB|$. 分别过点$A,B$作$AA_1\perp l$于$A_1$，$BB_1\perp l$于$B_1$，则$|FA|=|AA_1|$，$|FB|=|BB_1|$，$AA_1/\!/BB_1$，所以$\frac{|FA|}{|FB|}=\frac{|AA_1|}{|BB_1|}=\frac{|DA|}{|DB|}=\frac{1}{2}$，故答案为$\frac{1}{2}$.



16．将 0，1，2，3，10 任意排成一行，可以组成_______个不同的 6 位数.（用数字作答）

【命题意图】本小题主要考查分类加法计数原理、分步乘法计数原理、排列等基础知识；考查运算求解等能力；考查化归与转化等思想；体现综合性，导向对数学运算、数学建模等核心素养的关注.

【试题解析】解法一：将 0，1，2，3，10 任意排成一行，且数字 0 不在首位，有$4A_4^4=96$种，

数字 1 和 0 相邻且 1 在 0 之前的排法有$A_4^4=24$种，

故所求满足题意的 6 位数有$96-\frac{24}{2}=84$个.

解法二：将 0，1，2，3，10 任意排成一行，可以组成满足题意的 6 位数的情况分为如下三类：

第一类，1 和 0 相邻，且 1 在 0 之前，此时有$A_4^2=12$个；

第二类，1 和 0 相邻，且 0 在 1 之前，此时有$3A_3^3=18$个；

第三类，1 和 0 不相邻，此时有$A_3^3(A_3^1+A_3^2)=54$个；

故所求满足题意的 6 位数共有$12+18+54=84$个.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，且$a_{n+1}=2a_n+n-1$.

（1）证明：数列$\{a_n+n\}$为等比数列，并求出a_n；

（2）记数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n．若$a_n+b_n=2S_n$，求S_{11}.

【命题意图】本小题主要考查等比数列的定义与前n项和等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程、化归与转化、分类与整合等思想，体现基础性和综合性，导向对发展数学运算等核心素养的关注.

【试题解析】

解法一：（1）由$a_{n+1}=2a_n+n-1$可得$a_{n+1}+n+1=2(a_n+n)$，……1 分

因为$a_1=1$，所以$a_1+1=2$，……2 分

所以数列$\{a_n+n\}$是首项为2，公比为2的等比数列.……3 分

所以$a_n+n=2^n$，即$a_n=2^n-n$.……4 分

（2）因为$a_n+b_n=2S_n$，

当$n\geqslant 2$时，$a_{n-1}+b_{n-1}=2S_{n-1}$，……5 分

所以$a_n-a_{n-1}+b_n-b_{n-1}=2(S_n-S_{n-1})$，即$b_{n-1}+b_n=a_n-a_{n-1}$.……6 分

又$a_n-a_{n-1}=2^n-n-[2^{n-1}-(n-1)]=2^{n-1}-1$，

所以$b_{n-1}+b_n=2^{n-1}-1$.……7 分

又因为$a_1+b_1=2S_1$，所以$b_1=a_1=1$.……8 分

故$S_{11}=b_1+b_2+\cdots+b_{11}=b_1+(b_2+b_3)+\cdots+(b_{10}+b_{11})$……9 分

$=1+(2^2+2^4+2^6+2^8+2^{10})-5$

$=1360$.……10 分

解法二：（1）因为$a_{n+1}=2a_n+n-1$，

所以$\dfrac{a_{n+1}+n+1}{a_n+n}=\dfrac{2a_n+n-1+n+1}{a_n+n}=2$，……1 分

因为$a_1=1$，所以$a_1+1=2$，…… 2分

所以数列$\{a_n+n\}$是首项为2，公比为2的等比数列．…… 3分

所以$a_n+n=2^n$，即$a_n=2^n-n$．…… 4分

（2） 因为$a_n+b_n=2S_n$，

当$n\geqslant 2$时，$a_n+S_n-S_{n-1}=2S_n$，即$S_n+S_{n-1}=a_n$．…… 5分

所以$S_{n+1}+S_n=a_{n+1}$，因此$S_{n+1}-S_{n-1}=a_{n+1}-a_n$．…… 6分

又$a_{n+1}-a_n=2^{n+1}-(n+1)-(2^n-n)=2^n-1$，

所以$S_{n+1}-S_{n-1}=2^n-1$．…… 7分

又因为$a_1+b_1=2S_1$，所以$S_1=b_1=1$．…… 8分

所以$S_{11}=(S_{11}-S_9)+(S_9-S_7)+(S_7-S_5)+(S_5-S_3)+(S_3-S_1)+S_1$ …… 9分

$=(2^{10}-1)+(2^8-1)+(2^6-1)+(2^4-1)+(2^2-1)+1$

$=1360$．…… 10分

解法三：（1）同解法一．…… 4分

（2） 因为$a_n+b_n=2S_n$，

当$n\geqslant 2$时，$a_{n-1}+b_{n-1}=2S_{n-1}$，

所以$a_n-a_{n-1}+b_n-b_{n-1}=2(S_n-S_{n-1})$，即$b_{n-1}+b_n=a_n-a_{n-1}$．…… 5分

又$a_n-a_{n-1}=2^n-n-[2^{n-1}-(n-1)]=2^{n-1}-1$，所以$b_{n-1}+b_n=2^{n-1}-1$，…… 6分

所以$b_n-\dfrac{2^n}{3}+\dfrac{1}{2}=-(b_{n-1}-\dfrac{2^{n-1}}{3}+\dfrac{1}{2})$．…… 7分

又因为$a_1+b_1=2S_1$，所以$b_1=a_1=1$，$b_1-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{6}$．…… 8分

所以数列$\{b_n-\dfrac{2^n}{3}+\dfrac{1}{2}\}$是首项为$\dfrac{5}{6}$，公比为$-1$的等比数列．

因此$b_n-\dfrac{2^n}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{6}\times(-1)^{n-1}$，$b_n=\dfrac{5}{6}\times(-1)^{n-1}+\dfrac{2^n}{3}-\dfrac{1}{2}$，…… 9分

这时$S_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}=\dfrac{2^n-n+\dfrac{5}{6}\times(-1)^{n-1}+\dfrac{2^n}{3}-\dfrac{1}{2}}{2}=\dfrac{2^{n+1}}{3}+\dfrac{5}{12}\times(-1)^{n-1}-\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{4}$，

故$S_{11}=\dfrac{2^{12}}{3}+\dfrac{5}{12}-\dfrac{11}{2}-\dfrac{1}{4}=1360$．…… 10分

解法四：（1）同解法一．…… 4分

（2） 因为$a_n+b_n=2S_n$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n+S_n-S_{n-1}=2S_n$，

所以 $S_n=-S_{n-1}+a_n$，即 $S_n=-S_{n-1}+2^n-n$． ……………………………………5 分

所以 $S_n-\dfrac{2^{n+1}}{3}+\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{4}=-(S_{n-1}-\dfrac{2^n}{3}+\dfrac{n-1}{2}+\dfrac{1}{4})$． ……………………………7 分

又因为 $a_1+b_1=2S_1$，所以 $b_1=a_1=1$，$S_1-\dfrac{2^2}{3}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}$． …………………8分

所以数列 $\{S_n-\dfrac{2^{n+1}}{3}+\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{4}\}$ 是首项为 $\dfrac{5}{12}$，公比为 -1 的等比数列.

因此 $S_n-\dfrac{2^{n+1}}{3}+\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}\times(-1)^{n-1}$，$S_n=\dfrac{5}{12}\times(-1)^{n-1}+\dfrac{2^{n+1}}{3}-\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{4}$， ………9分

故 $S_{11}=\dfrac{5}{12}+\dfrac{2^{12}}{3}-\dfrac{11}{2}-\dfrac{1}{4}=1360$． ………………………………………………10分

18．（12 分）

在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60^\circ$，$\angle ADC=120^\circ$，点 B,D 在直线 AC 的两侧，$AB=1$，$BC=2$．

（1）求 $\angle BAC$；

（2）求 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的面积之和的最大值.

【命题意图】本小题主要考查解三角形、三角恒等变换等基础知识，考查推理论证、运算求解等能力，考查数形结合和化归与转化等思想，体现综合性与应用性，导向对发展直观想象、逻辑推理及数学运算等核心素养的关注.

【试题解析】

（1）在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$． ……2 分

因为 $AB=1$，$BC=2$，$\angle ABC=60^\circ$，

所以 $AC^2=1^2+2^2-2\times1\times2\times\dfrac{1}{2}=3$，即 $AC=\sqrt{3}$． ……………………………………3 分

所以 $BC^2=AC^2+AB^2$， ………………………………………………………………………4 分

故 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$． ……………………………………………………………………………5 分

（2）设 $\angle CAD=\theta$，$\theta\in(0,\dfrac{\pi}{3})$，则 $\angle ACD=\dfrac{\pi}{3}-\theta$．

在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理，得 $\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}=\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}$， ………………………………6 分

即 $\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{AD}{\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)}$，所以 $AD=2\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)$． ……………………………………………7 分

因为 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AB\cdot\sin(\theta+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}AD\cos\theta$， ……………………………………8 分

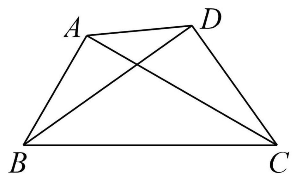
$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AC\cdot\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}AD\sin\theta$， ……………………………………………………9 分

所以 $S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AD\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}AD\sin\theta=2\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=\sin(2\theta+\frac{\pi}{3})$．

……………………………………………………………………………………………… 11 分

因为 $\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$，所以 $2\theta+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3},\pi)$，当 $2\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{12}$ 时，$(S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD})_{\max}=1$．

故 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的面积和的最大值为1． ……………………………………………12 分

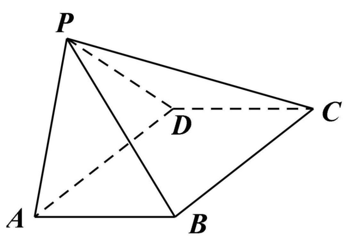


19．（12 分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，点 P 在平面 $ABCD$ 内的投影落在棱 AD 上，$AD=3$．

（1）求证：平面 $PDA\perp$ 平面 PDC；

（2）若 $PB=\sqrt{3}$，$PC=\sqrt{6}$，当四棱锥 $P-ABCD$ 的体积最大时，求平面 PDC 与平面 PBC 的夹角的余弦值．



【命题意图】本题主要考查线面垂直的性质定理，面面垂直的判定定理及平面与平面夹角的余弦值等基础知识；考查空间想象能力、推理论证及运算求解能力；考查数形结合思想、化归与转化思想等；体现基础性、综合性与应用性，导向对发展逻

辑推理、数学运算、直观想象等核心素养的关注.

【试题解析】解法一：(1) 作 $PO\perp AD$ 于点 O，由已知 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，……………1 分

又 $CD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PO\perp CD$，……………………………………………2 分

又因为 $AD\perp CD$， $AD\cap PO=O$， $AD,PO\subset$ 平面 PAD，所以 $CD\perp$ 平面 PDA．…4 分

因为 $CD\subset$ 平面 PDC，所以平面 $PDA\perp$ 平面 PDC．……………………………5 分

(2) 过 O 作 $OE\perp BC$ 于 E，连结 PE．

由已知 $BC=AD=3$， $PB=\sqrt{3}$， $PC=\sqrt{6}$，得 $BC^2=PB^2+PC^2$，所以 $PB\perp PC$．

……………………………………………………………………………………6 分

又因为 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，又 $BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PO\perp BC$，且 $OE\perp BC$，

$PO\cap OE=O$， $PO,OE\subset$ 平面 POE，

所以 $BC\perp$ 平面 POE，又 $PE\subset$ 平面 POE，

所以 $BC\perp PE$．……………………………………………………………………7 分

所以 $PE=\dfrac{PB\cdot PC}{BC}=\sqrt{2}$，且 $BE=1,CE=2$，

四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{矩形ABCD}\cdot PO=\dfrac{1}{3}AD\cdot AB\cdot PO=OE\cdot PO$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle POE$ 中， $PE^2=PO^2+OE^2\geqslant 2PO\cdot OE$，所以 $PO\cdot OE\leqslant 1$，

当且仅当 $PO=OE=1$ 时， $PO\cdot OE=1$，此时四棱锥 $P-ABCD$ 的体积最大．……… 8 分

以 O 为坐标原点，向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OP}$ 为 x 轴， y 轴， z 轴正方向建立空间直角坐标系．

$P(0,0,1)$， $D(-2,0,0)$， $C(-2,1,0)$， $B(1,1,0)$， $\overrightarrow{CP}=(2,-1,1)$，

$\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$， $\overrightarrow{CB}=(3,0,0)$．…………………………………………………… 9 分

设平面 PDC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$．

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x_1-y_1+z_1=0,\\ y_1=0,\end{cases}$ 取 $x_1=1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,0,-2)$．……………………… 10 分

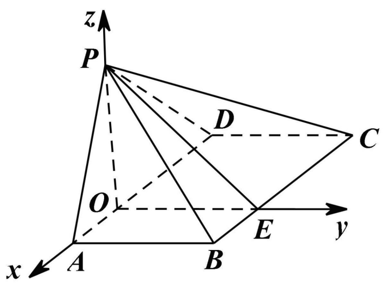
设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$．

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x_2-y_2+z_2=0,\\ 3x_2=0,\end{cases}$ 取 $y_2=1$，则 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$．………………………… 11 分

设平面 PDC 与平面 PBC 的夹角为 θ， $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2}]$．

所以 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$．

故平面 PDC 与平面 PBC 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$． …………………………………… 12 分



解法二：（1）同解法一． ………………………………………………………………… 5 分

（2）设 $PO=h$， $OA=x$， $AB=y$．

因为 $CD/\!/AB$， $CD\perp$ 平面 PDA，所以 $AB\perp$ 平面 PDA．

又 $PA\subset$ 平面 PDA，所以 $AB\perp PA$． ……………………………………………………6 分

同理 $CD\perp PD$．

因为 $PB=\sqrt{3}$， $PC=\sqrt{6}$，所以 $PA^2=3-y^2=h^2+x^2$， $PD^2=6-y^2=h^2+(3-x)^2$，

解得 $x=1$，所以 $y^2+h^2=2$． ………………………………………………………………7 分

四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{\text{矩形}ABCD}\cdot PO=\dfrac{1}{3}AB\cdot AD\cdot PO=yh\leqslant\dfrac{y^2+h^2}{2}=1$，

当且仅当 $y=h=1$ 时，此时四棱锥 $P-ABCD$ 的体积最大． ……………………………… 8 分

过 B 作 $BH\perp$ 平面 PDC 于 H，连结 PH．

$PC\subset$ 平面 PDC，所以 $BH\perp PC$．

由已知 $BC=AD=3$， $PB=\sqrt{3}$， $PC=\sqrt{6}$ 得， $BC^2=PB^2+PC^2$，

所以 $PB\perp PC$． ……………………………………………………………………………… 9 分

又 $PB\cap BH=B$， $PB,BH\subset$ 平面 PBH，所以 $PC\perp$ 平面 PBH，

又 $PH\subset$ 平面 PBH，所以 $PC\perp PH$， ……………………………………………………10 分

所以 $\angle BPH$ 为平面 PDC 与平面 PBC 的夹角．

（过 A 作 $AF\perp PD$ 于 F，因为 $CD\perp$ 平面 PDA， $AF\subset$ 平面 PDA，所以 $CD\perp AF$，

又 $AF\perp PD$， $PD\cap CD=D$， $PD,CD\subset$ 平面 PDC，所以 $AF\perp$ 平面 PDC，

因为 $AB/\!/CD$， $CD\subset$ 平面 PDC， $AB\not\subset$ 平面 PDC，所以 $AB/\!/$ 平面 PDC，

所以 $BH=AF$． ………………………………………………………………………………… 11 分

在 $\text{Rt}\triangle POD$ 中， $PO=1,OD=2$，则 $PD=\sqrt{5}$，

所以 $AF=\dfrac{AD\cdot PO}{PD}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$，所以 $BH=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.）

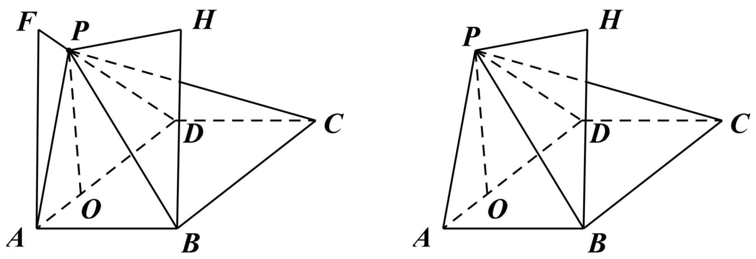
括号部分也可以如下方法：

（又 $V_{B-PCD}=V_{P-BCD}$，即 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{5}\cdot BH=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times3\times1\times1$，所以 $BH=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. ）…… 11分

在 Rt$\triangle BPH$ 中，$BP=\sqrt{3}$，$BH=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$，则 $PH=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$，

所以 $\cos\angle BPH=\dfrac{PH}{PB}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

故平面 PDC 与平面 PBC 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. …………………………………… 12 分



20.（12 分）

某同学尝试运用所学的概率知识研究如下游戏规则设置：游戏在两人中进行，参与者每次从装有 3 张空白券和 2 张奖券的盒子中轮流不放回地摸出一张，规定摸到最后一张奖券或能判断出哪一方获得最后一张奖券时游戏结束，能够获得最后一张奖券的参与者获胜.

（1）从胜负概率的角度，判断游戏规则设置是否公平；

（2）设游戏结束时参与双方摸券的次数为 X，求随机变量 X 的分布列.

【命题意图】本题主要考查概率乘法公式、古典概型、离散型随机变量的分布列等基础知识；考查运算求解、推理论证能力等；考查分类与整合、化归与转化思想等．体现基础性、应用性和综合性，导向对发展数学运算、数学抽象等核心素养的关注.

【试题解析】（1）将 3 张空白券简记为“白”，将 2 张奖券简记为“奖”，

率先摸券的一方获胜，包括以下几种情况：

①双方共摸券 3 次，出现“奖白奖”、“白奖奖”、“白白白”这三种情形，

对应的概率为 $p_1=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{3}{10}$； ……………………2 分

②双方共摸券 4 次，出现的恰好是“三白一奖且前三次必定出现一次奖券”，

对应的概率为 $p_2=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$；…………4 分

故先摸券的一方获胜的概率为 $p=p_1+p_2=\frac{3}{5}$. …………………………………5 分

又 $\frac{3}{5}>\frac{1}{2}$，故这场游戏不公平. ……………………………………………………6 分

（2）由题意可知 X 的所有可能取值为 $2,3,4$. …………………………………7 分

$P(X=2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$，

$P(X=3)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{10}$，

$P(X=4)=1-P(X=2)-P(X=4)=\frac{3}{5}$，

所以 X 的分布列为

X	2	3	4
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

………………………………………………………………………………………………12分

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=axe^x-\ln(x+1)$.

（1）讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的零点个数；

（2）若 $f(x)\geqslant 2\ln a-3\ln 2-3$，求 a 的取值范围.

【命题意图】本题主要考查运用导数判断函数的单调性、求函数的极值与最值、零点存在定理等基础知识；考查推理论证、运算求解等能力；考查函数与方程、化归与转化、数形结合等数学思想；体现综合性、应用性与创新性，导向对发展逻辑推理、数学运算、直观想象等核心素养的关注.

【试题解析】（1） $f'(x)=a(x+1)e^x-\frac{1}{x+1}$， $x>-1$. ……………………………1 分

当 $a\leq 0$ 时， $f'(x)<0$，此时 $f'(x)$ 没有零点；…………………………………2 分

当 $a>0$ 时，由于 $f''(x)=a(x+2)e^x+\frac{1}{(x+1)^2}>0$，…………………………3 分

即 $f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 单调递增.

取 $m=\min\{0,-1+\frac{1}{a}\},n=\max\{1,-1+\frac{1}{a}\}$，

则 $f(m)\le a(0+1)e^{0}-\dfrac{1}{m+1}\le a-\dfrac{1}{-1+\dfrac{1}{a}+1}=0$，

$f(n)\ge a(1+1)e-\dfrac{1}{n+1}\ge 2ea-\dfrac{1}{-1+\dfrac{1}{a}+1}=(2e-1)a>0$，

由零点的存在性定理，可知 $f'(x)$ 存在唯一的零点 x_0. ……………………4 分

（**说明**：若用极限 $x\to -1$ 时，$f'(x)\to-\infty$；$x\to+\infty$ 时，$f'(x)\to+\infty$ 代替取点，这 1 分不扣）

综上，当 $a\le 0$ 时，$f'(x)$ 没有零点；$a>0$ 时，$f'(x)$ 只有 1 个零点．………5 分

（2）因为 $a>0$，由（1）可知 $a=\dfrac{1}{(x_0+1)^2e^{x_0}}$，即有 $\ln a=-2\ln(x_0+1)-x_0$

且当 $x\in(-1,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；……………………………… 7 分

所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)$，

因此只需 $f(x_0)=ax_0e^{x_0}-\ln(x_0+1)=\dfrac{x_0}{(x_0+1)^2}-\ln(x_0+1)\ge 2\ln a-3\ln 2-3$，

即 $\dfrac{x_0}{(x_0+1)^2}+3\ln(x_0+1)+2x_0+3\ln 2+3\ge 0$．

令 $t(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}+3\ln(x+1)+2x+3\ln 2+3$，则只需 $t(x_0)\ge 0$．……………… 8 分

因为 $t'(x)=\dfrac{1-x}{(x+1)^3}+\dfrac{3}{x+1}+2=\dfrac{3x^2+5x+4}{(x+1)^3}+2=\dfrac{3(x+\frac{5}{6})^2+\frac{23}{12}}{(x+1)^3}+2>0$，

所以 $t(x)$ 在 $x\in(-1,+\infty)$ 单调递增，又 $t(-\dfrac{1}{2})=0$，

由 $t(x_0)\ge 0$，可得 $x_0\in[-\dfrac{1}{2},+\infty)$，……………………………………………… 10 分

即 $\ln a=-2\ln(x_0+1)-x_0\in(-\infty,\dfrac{1}{2}+2\ln 2]$，

故 $a\in(0,4\sqrt{e}]$．……………………………………………………………… 12 分

22．（12 分）

在锐角$\triangle MAB$中，$AB=2$，$MD\perp AB$于点D，$DM^2=2DA\cdot DB$．

（1）建立适当的坐标系，求动点M的轨迹C的方程；

（2）点F是以AB为直径的圆上$\overset{\frown}{AB}$的中点，过点F的直线与C交于P,Q两点，判断是否存在定点R，使得$PR^2+QR^2-PQ^2$为定值．

【命题意图】本题主要考查椭圆的标准方程，直线与椭圆的位置关系等基础知识；考查运算求解、逻辑推理和创新能力等；考查数形结合、函数与方程思想等；体现基础性、综合性与创新性，导向对直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养的关注．

【试题解析】

解法一：（1）如图，以AB的中点O为原点，AB所在直线为x轴建立平面直角坐标系xOy，

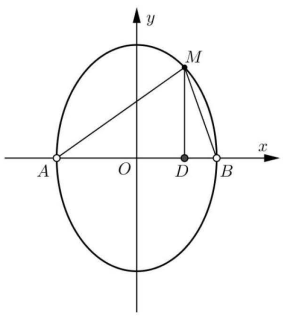
则$A(-1,0),B(1,0)$，…………………………………………………………………… 1 分

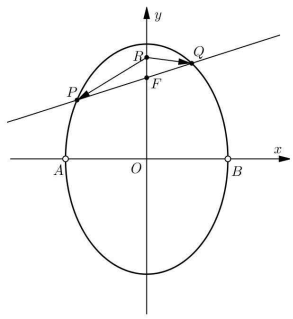
设$M(x,y)$，因为$\triangle MAB$是锐角三角形，所以$x\in(-1,1)$，

则$|DA|=1+x$，$|DB|=1-x$，$|MD|=|y|$．…………………………………………………… 2 分

由$DM^2=2DA\cdot DB$，得$y^2=2(1-x)(1+x)$，整理，得$\dfrac{y^2}{2}+x^2=1$，……………………3 分

所以点M的轨迹方程为$\dfrac{y^2}{2}+x^2=1(y\neq 0)$．…………………………………………… 4 分





（2）因为点F是以AB为直径的圆上$\overset{\frown}{AB}$的中点，所以点F在y轴上，不妨设点$F(0,1)$．

……………………………………………………………………………………………………5 分

假设存在满足条件的点$R(x_0,y_0)$．

①当PQ的斜率存在时，设PQ的方程为$y=kx+1$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases} y=kx+1, \\ \dfrac{y^2}{2}+x^2=1, \end{cases}$消去$y$，得$(kx+1)^2+2x^2=2$，整理，得$(k^2+2)x^2+2kx-1=0$，…… 6 分

从而 $x_1+x_2=-\dfrac{2k}{k^2+2}$， $x_1x_2=\dfrac{-1}{k^2+2}$， ……………………………………………………7 分

又 $\overrightarrow{RP}=(x_1-x_0,y_1-y_0)$， $\overrightarrow{RQ}=(x_2-x_0,y_2-y_0)$，

在 $\triangle PRQ$ 中，由余弦定理，得

$|PR|^2+|QR|^2-|PQ|^2=2|PR||QR|\cdot\cos\angle PRQ=2\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$， ………………………… 8 分

$$=2(x_1-x_0)(x_2-x_0)+2(y_1-y_0)(y_2-y_0)$$

$$=2(x_1-x_0)(x_2-x_0)+2(kx_1+1-y_0)(kx_2+1-y_0)$$

$$=2[(k^2+1)x_1x_2-(x_0+ky_0-k)(x_1+x_2)+x_0{}^2+(1-y_0)^2]$$ …………………………… 9 分

$$=2[(k^2+1)\frac{-1}{k^2+2}+(x_0+ky_0-k)\frac{2k}{k^2+2}+x_0{}^2+(1-y_0)^2]$$

$$=2[-1+\frac{1}{k^2+2}+\frac{2(y_0-1)k^2+2x_0k}{k^2+2}+x_0^2+(y_0-1)^2]$$

$$=2(x_0{}^2+y_0{}^2-2+\frac{2x_0k-4y_0+5}{k^2+2})$$， ……………………………………………………… 10 分

所以 $\begin{cases}2x_0=0,\\4y_0-5=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=0,\\y_0=\dfrac{5}{4},\end{cases}$

此时 $|PR|^2+|QR|^2-|PQ|^2=2\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=-\dfrac{7}{8}$， ……………………………………………… 11 分

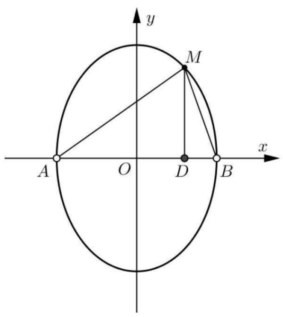
②当 PQ 的斜率不存在时， PQ 的方程为 $x=0$，此时 $P(0,\sqrt{2}),Q(1,-\sqrt{2})$，$R(0,\dfrac{5}{4})$，

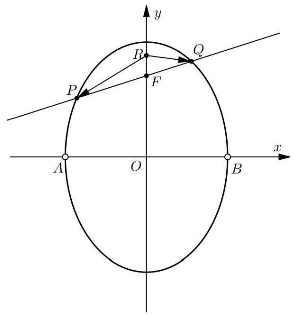
$\overrightarrow{RP}=(0,\sqrt{2}-\dfrac{5}{4})$， $\overrightarrow{RQ}=(0,-\sqrt{2}-\dfrac{5}{4})$，所以 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=-\dfrac{7}{16}$，

故 $|PR|^2+|QR|^2-|PQ|^2=2\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=-\dfrac{7}{8}$，

综上，可知存在定点 $R(0,\dfrac{5}{4})$，即 $\overrightarrow{OR}=\dfrac{5}{4}\overrightarrow{OF}$． ……………………………………… 12 分

解法二：（1）同解法一．……………………………………………………………………………… 4 分





（2）因为点 F 是以 AB 为直径的圆上 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，所以点 F 在 y 轴上，不妨设点 $F(0,1)$.

…………………………………………………………………………………………5 分

假设存在满足条件的点 $R(x_0,y_0)$.

①当 PQ 的斜率存在时，设 PQ 的方程为 $y=kx+1$， $P(x_1,y_1)$， $Q(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases} y=kx+1, \\ \dfrac{y^2}{2}+x^2=1, \end{cases}$ 消去 y，得 $(kx+1)^2+2x^2=2$，整理，得 $(k^2+2)x^2+2kx-1=0$，…· 6 分

从而 $x_1+x_2=-\dfrac{2k}{k^2+2}$， $x_1x_2=\dfrac{-1}{k^2+2}$， ……………………………………………………7 分

又 $|PR|^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2$，$|QR|^2=(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2$，$|PQ|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$，

$|PR|^2+|QR|^2-|PQ|^2=2x_0{}^2+2y_0{}^2-2x_1x_0-2y_1y_0-2x_2x_0-2y_2y_0+2x_1x_2+2y_1y_2$ ，··8 分

$=2x_0{}^2+2y_0{}^2-2x_0(x_1+x_2)+2x_1x_2-2y_0(y_1+y_2)+2y_1y_2$

$=2x_0{}^2+2y_0{}^2-2x_0(x_1+x_2)+2x_1x_2-2y_0(kx_1+kx_2+2)+2(kx_1+1)(kx_2+1)$

$=2[(k^2+1)x_1x_2-(x_0+ky_0-k)(x_1+x_2)+x_0{}^2+(y_0-1)^2]$ ………………………………… 9 分

$=2[(k^2+1)\dfrac{-1}{k^2+2}+(x_0+ky_0-k)\dfrac{2k}{k^2+2}+x_0{}^2+(1-y_0)^2]$

$=2[-1+\dfrac{1}{k^2+2}+\dfrac{2(y_0-1)k^2+2x_0k}{k^2+2}+x_0^2+(y_0-1)^2]$

$=2(x_0{}^2+y_0{}^2-2+\dfrac{2x_0k-4y_0+5}{k^2+2})$， ……………………………………………………10 分

所以 $\begin{cases} 2x_0=0, \\ 4y_0-5=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_0=0, \\ y_0=\dfrac{5}{4}, \end{cases}$

此时 $|PR|^2+|QR|^2-|PQ|^2=2\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=-\dfrac{7}{8}$， ……………………………………………11 分

②当 PQ 的斜率不存在时， PQ 的方程为 $x=0$，此时 $P(0,\sqrt{2}),Q(1,-\sqrt{2})$, $R(0,\dfrac{5}{4})$,

$\overrightarrow{RP}=(0,\sqrt{2}-\frac{5}{4})$，$\overrightarrow{RQ}=(0,-\sqrt{2}-\frac{5}{4})$，所以$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=-\frac{7}{16}$，

故$|PR|^2+|QR|^2-|PQ|^2=2\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=-\frac{7}{8}$，

综上，可知存在定点$R(0,\frac{5}{4})$，即$\overrightarrow{OR}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OF}$．…………………………………………… 12 分

解法三：（1）如图，以AB的中点O为原点，AB所在直线为y轴建立平面直角坐标系xOy，

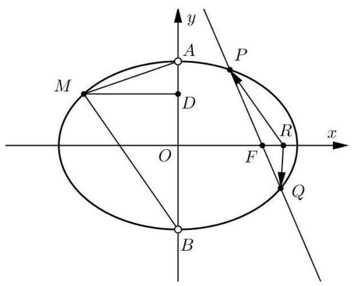
则$A(0,1),B(0,-1)$，…………………………………………………………………… 1 分

设$M(x,y)$，因为$\triangle MAB$是锐角三角形，所以$y\in(-1,1)$，

则$|DA|=1-y$，$|DB|=y+1$，$|MD|=|x|$，……………………………………………………… 2 分

由$DM^2=2DA\cdot DB$，得$x^2=2(1-y)(1+y)$，整理，得$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，…………………… 3 分

所以点M的轨迹方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1(x\neq 0)$．……………………………………………………4 分



（2）因为点F是以AB为直径的圆上$\overset{\frown}{AB}$的中点，所以点F在x轴上，不妨设点$F(1,0)$．

……………………………………………………………………………………………………5 分

假设存在满足条件的点$R(x_0,y_0)$．

①当PQ的斜率存在时，设PQ的方程为$y=k(x-1)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}y=k(x-1),\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$消去$y$，得$x^2+2k^2(x-1)^2=2$，整理，得$(2k^2+1)x^2-4k^2x+(2k^2-2)=0$，

……………………………………………………………………………………………………6 分

从而$x_1+x_2=\frac{4k^2}{2k^2+1}=2-\frac{2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2k^2-2}{2k^2+1}=1-\frac{3}{2k^2+1}$，………………………… 7 分

又$\overrightarrow{RP}=(x_1-x_0,y_1-y_0)$，$\overrightarrow{RQ}=(x_2-x_0,y_2-y_0)$，

在$\triangle PRQ$中，由余弦定理，得

$|PR|^2+|QR|^2-|PQ|^2=2|PR||QR|\cdot\cos\angle PRQ=2\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$，………………………… 8 分

$=2(x_1-x_0)(x_2-x_0)+2(y_1-y_0)(y_2-y_0)$

$=2(x_1-x_0)(x_2-x_0)+2(kx_1-k-y_0)(kx_2-k-y_0)$

$=2[(k^2+1)x_1x_2-(x_0+ky_0+k^2)(x_1+x_2)+(k+y_0)^2+x_0^{\ 2}]$ …………………………… 9 分

$=2[(k^2+1)(1-\dfrac{3}{2k^2+1})-(x_0+ky_0+k^2)(2-\dfrac{2}{2k^2+1})+(k+y_0)^2+x_0^{\ 2}]$

$=2(1-\dfrac{3k^2}{2k^2+1}-\dfrac{3}{2k^2+1}-2x_0-2y_0k+\dfrac{2x_0}{2k^2+1}+\dfrac{2y_0k}{2k^2+1}+\dfrac{2k^2}{2k^2+1}+2y_0k+y_0^{\ 2}+x_0^{\ 2})$

$=2x_0^{\ 2}+2y_0^{\ 2}-4x_0+2-\dfrac{2k^2}{2k^2+1}+\dfrac{4y_0k+4x_0-6}{2k^2+1}$

$=2x_0^{\ 2}+2y_0^{\ 2}-4x_0+1+\dfrac{4y_0k+4x_0-5}{2k^2+1}$ ………………………………………… 10 分

所以$\begin{cases}4y_0=0,\\4x_0-5=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x_0=\dfrac{5}{4},\\y_0=0,\end{cases}$ 此时$|PR|^2+|QR|^2-|PQ|^2=2\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=-\dfrac{7}{8}$. ……… 11 分

②当PQ的斜率不存在时，PQ的方程为$x=1$，此时$P(1,\dfrac{1}{\sqrt{2}}),Q(1,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}),R(\dfrac{5}{4},0)$，

$\overrightarrow{RP}=(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{\sqrt{2}})$，$\overrightarrow{RQ}=(-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{\sqrt{2}})$，所以$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=-\dfrac{7}{16}$，

故$|PR|^2+|QR|^2-|PQ|^2=2\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=-\dfrac{7}{8}$.

综上，可知存在定点$R(\dfrac{5}{4},0)$，即$\overrightarrow{OR}=\dfrac{5}{4}\overrightarrow{OF}$. ……………………………………… 12 分

解法四：（1）同解法三. ………………………………………………………………………… 4 分

（2）因为点F是以AB为直径的圆上$\overset{\frown}{AB}$的中点，所以点F在x轴上，不妨设点$F(1,0)$.

……………………………………………………………………………………………… 5 分

假设存在满足条件的点$R(x_0,y_0)$.

①当PQ的斜率存在时，设PQ的方程为$y=k(x-1)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}y=k(x-1),\\\dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 消去y，得$x^2+2k^2(x-1)^2=2$，整理，得$(2k^2+1)x^2-4k^2x+(2k^2-2)=0$，

从而$x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{2k^2+1}$，…………………………………………… 6 分

设PQ的中点为N，则$4|RN|^2+|PQ|^2=2|RP|^2+2|RQ|^2$，……………………………7 分

又$|PQ|=\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$，

所以$|PQ|^2=(k^2+1)\cdot[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=(k^2+1)[(\frac{4k^2}{2k^2+1})^2-4\frac{2k^2-2}{2k^2+1}]=8\frac{(k^2+1)^2}{(2k^2+1)^2}$，8 分

$|RN|^2=(x_0-\frac{2k^2}{2k^2+1})^2+(y_0-k(\frac{2k^2}{2k^2+1}-1))^2=(x_0-\frac{2k^2}{2k^2+1})^2+(y_0+\frac{k}{2k^2+1})^2$，……9 分

从而$|PR|^2+|QR|^2-|PQ|^2=2|RN|^2-\frac{1}{2}|PQ|^2$

$=2(x_0-\frac{2k^2}{2k^2+1})^2+2(y_0+\frac{k}{2k^2+1})^2-4\frac{(k^2+1)^2}{(2k^2+1)^2}$

$=2x_0{}^2+2y_0{}^2-\frac{8k^2x_0}{2k^2+1}+\frac{8k^4}{(2k^2+1)^2}+\frac{4ky_0}{2k^2+1}+\frac{2k^2}{(2k^2+1)^2}-4\frac{(k^2+1)^2}{(2k^2+1)^2}$

$=2x_0{}^2+2y_0{}^2-4\frac{(2k^2+1-1)x_0}{2k^2+1}+\frac{4ky_0}{2k^2+1}+\frac{2k^2-4}{2k^2+1}$

$=2x_0{}^2+2y_0{}^2-4x_0+1+\frac{4y_0k+4x_0-5}{2k^2+1}$，……………………………………………… 10 分

所以$\begin{cases}4y_0=0,\\4x_0-5=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_0=\frac{5}{4},\\y_0=0,\end{cases}$此时$|PR|^2+|QR|^2-|PQ|^2=2\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=-\frac{7}{8}$． ……… 11 分

②当PQ的斜率不存在时，PQ的方程为$x=1$，此时$P(1,\frac{1}{\sqrt{2}}),Q(1,-\frac{1}{\sqrt{2}})$，

$\overrightarrow{RP}=(-\frac{1}{4},\frac{1}{\sqrt{2}})$，$\overrightarrow{RQ}=(-\frac{1}{4},-\frac{1}{\sqrt{2}})$，所以$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=-\frac{7}{16}$，

故$|PR|^2+|QR|^2-|PQ|^2=2\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=-\frac{7}{8}$．

综上，可知存在定点$R(\frac{5}{4},0)$，即$\overrightarrow{OR}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OF}$． ……………………………………… 12 分

解法五：（1）同解法三．…………………………………………………………………………… 4 分

（2）因为点F是以AB为直径的圆上$\overset{\frown}{AB}$的中点，所以点F在x轴上，不妨设点$F(1,0)$．

……5 分

假设存在满足条件的点$R(x_0,y_0)$．

①当PQ的斜率存在时，设PQ的方程为$y=k(x-1)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}y=k(x-1),\\\frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$消去$y$，得$x^2+2k^2(x-1)^2=2$，

整理，得 $(2k^2+1)x^2-4k^2x+(2k^2-2)=0$，(*) ……………………………………………6 分

从而 x_1,x_2 是方程（*）的两根，所以 $(2k^2+1)x^2-4k^2x+(2k^2-2)=(2k^2+1)(x-x_1)(x-x_2)$，

……7 分

又 $\overrightarrow{RP}=(x_1-x_0,y_1-y_0)$，$\overrightarrow{RQ}=(x_2-x_0,y_2-y_0)$，

在 $\triangle PRQ$ 中，由余弦定理，得

$|PR|^2+|QR|^2-|PQ|^2=2|PR||QR|\cdot\cos\angle PRQ=2\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$，…………………………… 8 分

$$=2(x_1-x_0)(x_2-x_0)+2(y_1-y_0)(y_2-y_0)$$

$$=2(x_1-x_0)(x_2-x_0)+2(kx_1-k-y_0)(kx_2-k-y_0)$$

$$=2(x_1-x_0)(x_2-x_0)+2k^2(x_1-\frac{k+y_0}{k})(x_2-\frac{k+y_0}{k})$$ ………………………………… 9 分

$$=2\frac{(2k^2+1)x_0^{\ 2}-4k^2x_0+(2k^2-2)}{2k^2+1}+2k^2\frac{(2k^2+1)(\frac{k+y_0}{k})^2-4k^2\cdot\frac{k+y_0}{k}+(2k^2-2)}{2k^2+1}$$

$$=2x_0^{\ 2}-4x_0+\frac{4x_0}{2k^2+1}+2-\frac{6}{2k^2+1}+2(k+y_0)^2-4(k^2+ky_0)(1-\frac{1}{2k^2+1})+2k^2(1-\frac{3}{2k^2+1})$$

$$=2x_0^{\ 2}-4x_0+\frac{4x_0}{2k^2+1}+2-\frac{6}{2k^2+1}+2y_0^{\ 2}+\frac{4k^2}{2k^2+1}+\frac{4ky_0}{2k^2+1}+2k^2-\frac{6k^2}{2k^2+1}$$

$$=2x_0^{\ 2}+2y_0^{\ 2}-4x_0+1+\frac{4y_0k+4x_0-5}{2k^2+1},$$ …………………………………………… 10 分

所以 $\begin{cases}4y_0=0,\\4x_0-5=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=\frac{5}{4},\\y_0=0,\end{cases}$ 此时 $|PR|^2+|QR|^2-|PQ|^2=2\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=-\frac{7}{8}$. ……… 11 分

②当 PQ 的斜率不存在时，PQ 的方程为 $x=1$，此时 $P(1,\frac{1}{\sqrt{2}}),Q(1,-\frac{1}{\sqrt{2}})$，

$\overrightarrow{RP}=(-\frac{1}{4},\frac{1}{\sqrt{2}})$，$\overrightarrow{RQ}=(-\frac{1}{4},-\frac{1}{\sqrt{2}})$，所以 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=-\frac{7}{16}$，

故 $|PR|^2+|QR|^2-|PQ|^2=2\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=-\frac{7}{8}$.

综上，可知存在定点 $R(\frac{5}{4},0)$，即 $\overrightarrow{OR}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OF}$. ……………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。