

榆林市 2022 ~ 2023 学年度第二学期普通高中过程性评价质量检测

高二年级数学(理科)试题参考答案及评分标准

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. D 2. C 3. D 4. D 5. B 6. A 7. B 8. C 9. B 10. B 11. C 12. A

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $-\frac{1}{2}$ 14. 5 15. 2 16. 2

三、解答题:共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17 - 21 题为必考题,每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17. 解:(I) $\because 2b\cos B = c\cos A + a\cos C,$

$$\therefore 2\sin B\cos B = \sin C\cos A + \sin A\cos C = \sin(A+C) = \sin B,$$

又 $B \in (0, \pi), \therefore \sin B > 0,$

$$\therefore \cos B = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

(II) 由(I)可知 $\cos B = \frac{1}{2},$

$$\text{根据余弦定理 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \text{ 即 } \frac{1}{2} = \frac{a^2 + c^2 - 4}{2ac},$$

$$\text{即 } a^2 + c^2 = ac + 4, \text{ 即 } (a+c)^2 = 3ac + 4,$$

$$\text{又 } a+c=4, \text{ 则 } 16 = 3ac + 4, \text{ 即 } ac=4,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

18. 解:(I) 由题意知 $100 \times (0.0015 + a + 0.0025 + 0.0015 + 0.0010) = 1,$

$$\text{解得 } a = 0.0035. \quad \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

(II) 由题意,从 $[550, 650)$ 中抽取 7 人,从 $[750, 850)$ 中抽取 3 人,

随机变量 X 的所有可能取值有 0, 1, 2, 3.

$$P(X=k) = \frac{C_3^k C_7^{3-k}}{C_{10}^3} (k=0, 1, 2, 3),$$

$\therefore$ 随机变量 X 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{35}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{1}{120}$

$$E(X) = 0 \times \frac{35}{120} + 1 \times \frac{63}{120} + 2 \times \frac{21}{120} + 3 \times \frac{1}{120} = \frac{9}{10}. \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

19. 解:(I) 证明: $\because PA \perp$ 平面 $ABCD, AD \subset$ 平面 $ABCD,$

$\therefore PA \perp AD,$

$\because$ 底面 $ABCD$ 为正方形, $\therefore AB \perp AD,$

又 $AB \cap PA = A,$ 且 $AB \subset$ 平面 $PAB, PA \subset$ 平面 $PAB,$

$\therefore AD \perp$ 平面 $PAB,$

又 $PB \subset$ 平面 $PAB, \therefore AD \perp PB. \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$

榆林市高二年级数学(理科)试题-答案-1(共 3 页)



(II) 由(I)可知, AP, AB, AD 两两垂直,

以点 A 为原点, 分别以 AB, AD, AP 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,2,0), P(0,0,2)$,

又 E, F 分别是 BC, PC 的中点,

$\therefore F(1,1,1), E(2,1,0)$.

$\therefore \overrightarrow{AF} = (1,1,1), \overrightarrow{AE} = (2,1,0), \overrightarrow{AP} = (0,0,2)$,

设平面 AEF 的法向量为 $m = (x, y, z)$,

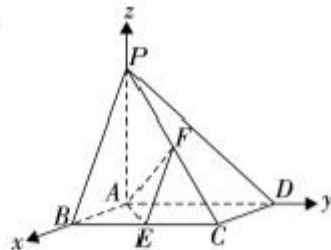
则 $\begin{cases} \overrightarrow{AF} \cdot m = 0, \\ \overrightarrow{AE} \cdot m = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x+y+z=0, \\ 2x+y=0, \end{cases}$ 取 $x=1$, 则 $y=-2, z=1$.

$\therefore$ 平面 AEF 的一个法向量为 $m = (1, -2, 1)$,

易知平面 AEC 的一个法向量为 $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 2)$,

$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AP}, m \rangle = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot m}{|\overrightarrow{AP}| |m|} = \frac{2}{2 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$,

$\therefore$ 平面 AEF 与平面 AEC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (12分)



20. 解: (I) 依题意有 $\begin{cases} 2\sqrt{a^2-b^2}=2, \\ \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{1}{2}, \end{cases}$ 解得 $a^2=4, b^2=3$.

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ (6分)

(II) 联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = x+m, \end{cases}$ 消去 y 得 $7x^2 + 8mx + 4m^2 - 12 = 0$,

由 $\Delta = 64m^2 - 28(4m^2 - 12) > 0$, 解得 $-\sqrt{7} < m < \sqrt{7}$.

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

则 $x_1 + x_2 = -\frac{8m}{7}, x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 12}{7}$,

$\therefore y_1 y_2 = (x_1 + m)(x_2 + m) = x_1 x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{3m^2 - 12}{7}$,

$\therefore \overrightarrow{OM} = (x_1, y_1), \overrightarrow{ON} = (x_2, y_2)$,

$\therefore \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$,

即 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{4m^2 - 12}{7} + \frac{3m^2 - 12}{7} = \frac{7m^2 - 24}{7} = 0$,

解得 $m = \pm \frac{2\sqrt{42}}{7}$ (经检验符合题意). (12分)

21. 解: (I) $f'(x) = 1 - e^x$.

当 $x < 0$ 时 $f'(x) > 0$; 当 $x > 0$ 时 $f'(x) < 0$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增; 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

$\therefore f(x)_{\max} = f(0) = a - 1$.

又当 $x \rightarrow -\infty$ 时 $f(x) \rightarrow -\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x) \rightarrow -\infty$,

$\therefore f(x)_{\min} = a - 1 > 0$, 即 $a > 1$.

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $(1, +\infty)$ (4分)

(II) 证明: $\because g(x) = (x - e^x + a) - (-2x - e^{-2x} + a) = 3x - e^x + e^{-2x}$,

$\therefore g'(x) = 3 - e^x - 2e^{-2x}$,



$$\therefore g''(x) = 4e^{-2x} - e^x,$$

又 $x \in (-\infty, 0)$ 时, 有 $4e^{-2x} > 1, e^x < 1$,

$$\therefore g''(x) > 0,$$

$\therefore g'(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 从而 $g'(x) < g'(0) = 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减. (8 分)

(Ⅲ) 证明: 由 (Ⅰ) 知, $x_1 < 0 < x_2$,

要证 $2x_1 + x_2 < 0$, 只需证 $x_2 < -2x_1$,

$\because f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore$ 只需证 $f(x_2) > f(-2x_1)$.

$$\because f(x_1) = f(x_2) = 0,$$

$\therefore$ 只需证 $f(x_1) > f(-2x_1)$, 其中 $x_1 < 0$.

$\therefore$ 只需证 $g(x_1) = f(x_1) - f(-2x_1) > 0$, 其中 $x_1 < 0$.

由 (Ⅱ) 知, 当 $x < 0$ 时, $g(x) > g(0) = 0$,

$$\therefore f(x_1) - f(-2x_1) > 0.$$

$$\therefore 2x_1 + x_2 < 0. \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

(二) 选考题: 共 10 分. 考生从 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. 解: (Ⅰ) 由曲线 C 的参数方程 $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{10} \cos \alpha, \\ y = \sqrt{10} \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数),

消去参数 α 可得 $(x-2)^2 + y^2 = 10$, 即 $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$,

根据 $\begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2, \\ x = \rho \cos \theta, \end{cases}$

可得曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 - 4\rho \cos \theta - 6 = 0$ (5 分)

(Ⅱ) 设点 A 的极坐标为 $(\rho_1, \frac{\pi}{4})$, 点 B 的极坐标为 $(\rho_2, \frac{\pi}{4})$,

将 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 代入曲线 C 的极坐标方程可得 $\rho_1^2 - 4\rho_1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 6 = 0$,

又 $\rho_1 \geq 0$, 解得 $\rho_1 = 3\sqrt{2}$.

将 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 代入直线 l 的极坐标方程可得 $3\rho_2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 12 = 0$, 解得 $\rho_2 = 4\sqrt{2}$,

$$\therefore |AB| = |\rho_1 - \rho_2| = \sqrt{2}. \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

23. 解: (Ⅰ) $f(x) = |x-1| + 2|x+5| = \begin{cases} -3x-9, & x \leq -5, \\ x+11, & -5 < x \leq 1, \\ 3x+9, & x > 1, \end{cases}$

又 $f(x) < 10$,

$\therefore$ 当 $x \leq -5$ 时, $-3x-9 < 10$, 解得 $-\frac{19}{3} < x \leq -5$;

当 $-5 < x \leq 1$ 时, $x+11 < 10$, 解得 $-5 < x < -1$;

当 $x > 1$ 时, $3x+9 < 10$, 无解.

$\therefore$ 不等式 $f(x) < 10$ 的解集为 $(-\frac{19}{3}, -1)$ (5 分)

(Ⅱ) 证明: 若 $(a+b)(a-b) \geq 0$,

$$\text{则 } |a+b| + |a-b| = |a+b+a-b| = 2|a| < 6;$$

若 $(a+b)(a-b) < 0$, 则 $|a+b| + |a-b| = |a+b-(a-b)| = 2|b| < 6$.

$$\therefore |a+b| + |a-b| < 6,$$

又由 (Ⅰ) 易知 $f(x)_{\min} = f(-5) = 6$,

$\therefore |a+b| + |a-b| < f(x)$ 成立. (10 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线