2023届新高考基地学校第五次大联考

数　学

本试卷共6页，22小题，满分150分。考试时间120分钟。

注意事项：1． 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡“条形码粘贴处”。

2． 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3． 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4． 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1． 若集合$M=\{x|x=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\left\{x\middle|x=\frac{k}{2}\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$，则

A．$M\cap N=\varnothing$　　B．$M\cap N=N$　　C．$M\cup N=\mathbf{Z}$　　D．$M\cup N=N$

2． 已知$z=a+\mathrm{i}$，且$z^2+2z+b=0$，其中a，b为实数，则

A．$a=1$，$b=2$　　B．$a=-1$，$b=2$　　C．$a=1$，$b=0$　　D．$a=-1$，$b=0$

3． 双曲函数起初用来描述一些物理运动过程，后来又大量应用于计算机科学、经济和金融领域．若双曲正切函数为$\tanh x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$，则$\tanh x$

A．是偶函数，且在**R**上单调递减　　B．是偶函数，且在**R**上单调递增

C．是奇函数，且在**R**上单调递减　　D．是奇函数，且在**R**上单调递增

4． 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$是两个单位向量，若$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量为$\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$，则$\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=$

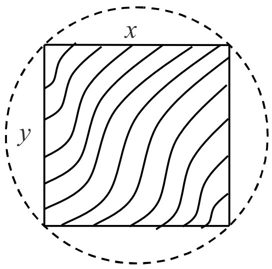
A．$-\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

5． 甲、乙两所学校各有3名志愿者参加一次公益活动，活动结束后，站成前后两排合影留念，每排3人．若每排同一个学校的两名志愿者不相邻，则不同的站法种数有

A．36　　B．72　　C．144　　D．288

6. 中国古代建筑的主要受力构件是梁，其截面的基本形式是矩形．如图，将一根截面为圆形的木材加工制成截面为矩形的梁，设与承载重力的方向垂直的宽度为 x，与承载重力的方向平行的高度为 y，记矩形截面抵抗矩 $W=\frac{1}{6}xy^2$．

根据力学原理，截面抵抗矩越大，梁的抗弯曲能力越强，则宽 x 与高 y 的最佳之比应为



A．$\frac{1}{2}$　　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

C．1　　　D．$\sqrt{2}$

7. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期为 T，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，设 $g(x)=f(x)+f'(x)$．若 $g(x)$ 是奇函数，且 $g(x)$ 的最大值为 $\sqrt{5}$，则 $f(\frac{T}{8})=$

A．$-\frac{\sqrt{10}}{10}$　　　B．$\frac{\sqrt{10}}{10}$　　　C．$-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　　D．$\frac{\sqrt{5}}{5}$

8. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{2}{3}$，左顶点是 A，左、右焦点分别是 F_1，F_2，M 是 C 在第一象限上的一点，直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N．若 $MF_2 // AN$，且 $\triangle ANF_2$ 的周长为 $\frac{7}{2}a$，则直线 MN 的斜率为

A．$\frac{\sqrt{5}}{3}$　　　B．$\frac{\sqrt{15}}{7}$　　　C．$\frac{2\sqrt{3}}{7}$　　　D．$\frac{5}{6}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AC$，$B_1C=BC_1$，D 是 BC 中点，则

A．直线 AC_1 与 A_1D 异面　　　B．直线 $AD//$ 平面 A_1BC_1

C．直线 $AA_1\perp$ 平面 ABC　　　D．直线 $BC\perp$ 平面 A_1AD

10. 根据《国家学生体质健康标准》规定，学生的体测得分由各单项指标得分与权重乘积之和组成，为了科学衡量个体体质在全体中的位置，通常将体测得分转化为标准分数．某校一次体能测试中，各同学体测得分为 x_i，所有同学的体测平均得分为 $\overline{x}$，标准差为 s，定义标准分数 $y_i=\frac{1}{s}\left(x_i-\overline{x}\right)$，则

A．转化标准分数后的极差是转化前极差的$\frac{1}{s}$

B．转化标准分数后的平均分数为 0

C．转化标准分数后的中位数是转化前中位数的$\frac{1}{s}$

D．转化标准分数后的标准差等于 1

11． 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$的离心率为$\sqrt{3}$，$F_1,F_2$是$C$的左、右焦点．经过点$F_2$的直线$l$与$C$的一条渐近线垂直，且与$C$交于$A$，$B$两点，则

A．C的渐近线方程为$y=\pm 2x$　　B．点F_1到直线l的距离为$2a$

C．$|AF_1|=|BF_1|$　　D．$|AB|=4a$

12． 设实数a，b，c都不为零，且$b=ae^a$，$c=be^b$，则

A．$b\geqslant -\frac{1}{e}$　　B．$c>-\frac{1}{4}$　　C．$c>b>a$　　D．$|c-b|>|b-a|$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13． $\left(\frac{1}{x}+a\right)(1-x)^5$展开式中的常数项为 6，则$a=$________.

14． 甲、乙两个机器人分别从相距 70 m 的两处同时相向运动，甲第 1 分钟走 2 m，以后每分钟比前 1 分钟多走 1 m，乙每分钟走 5 m．若甲、乙到达对方起点后立即返回，则它们第二次相遇需要经过________分钟．

15． 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$棱长为 1，M是A_1C_1上一点，且$A_1M=2MC_1$．经过点M作平面α截正方体的外接球，则截得的截面面积的最小值为________.

16． 设$A(1,0)$，$B(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$C(\cos\beta,\sin\beta)$，O为坐标原点．若$AB\,//\,OC$，且△BOC的面积是△AOB的面积的 2 倍，则$|AC|=$________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本题 10 分）

在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $b-a=2a\cos C$．

（1）证明：$C=2A$；

（2）若 $a=3$，$\sin A=\frac{1}{3}$，求△ABC 的面积．

18.（12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{3}$，$(2-a_n)a_{n+1}=1$．

（1）证明：数列 $\left\{\frac{1}{1-a_n}\right\}$ 是等差数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

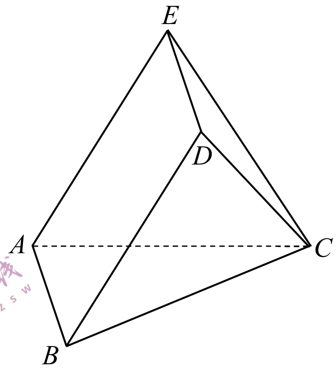
（2）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的积为 T_n，证明：$T_1^2+T_2^2+\cdots+T_n^2<\frac{1}{2}$．

19．（12 分）

如图，在多面体 $ABCDE$ 中，已知平面 $AEC\perp$平面 ABC，$\triangle AEC$ 是边长为 2 的正三角形，$AB\perp BC$，$\angle CAB=\angle CAE$，四边形 $ABDE$ 为平行四边形．

（1）求多面体 $ABCDE$ 的体积；

（2）求直线 AD 与平面 CDE 所成角的正弦值．



（第 19 题）

20．（12 分）

某兴趣小组为研究一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯（卫生习惯分为良好和不够良好两类）的关系，设 $A=$“患有地方性疾病”，$B=$“卫生习惯良好”．据临床统计显示，$P(A|\overline{B})=\dfrac{3}{4}$，$P(B|\overline{A})=\dfrac{12}{13}$，该地人群中卫生习惯良好的概率为$\dfrac{4}{5}$．

（1）求 $P(A)$和 $P(A|B)$，并解释所求结果大小关系的实际意义；

（2）为进一步验证（1）中的判断，该兴趣小组用分层抽样的方法在该地抽取了一个容量为 m ($m\in\mathbf{N}^*$)的样本，利用独立性检验，计算得 $K^2=2.640$．为提高检验结论的可靠性，现将样本容量调整为原来的 k ($k\in\mathbf{N}^*$)倍，使得能有 99.9%的把握肯定（1）中的判断，试确定 k 的最小值．

参考公式及数据：

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)};\ P(K^2\geqslant 6.635)=0.010;\ P(K^2\geqslant 10.828)=0.001.$$

21．（12 分）

已知抛物线$T: y^2=4x$，点$P(2,0)$，过点$Q(4,0)$的直线交T于$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$两点，直线AP,BP与T的另一个交点分别为$C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$．

（1）证明：$y_1y_2y_3y_4$为定值；

（2）经过点P且与x轴垂直的直线与AD,BC分别交于点E,F，求证：$|PE|=|PF|$．

22. （12 分）

已知函数$f(x)=\mathrm{e}^{ax}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{x}$．

（1）若$a=0$，关于x的不等式$f(x)<m$恰有两个整数解，求m的取值范围；

（2）若$f(x)$的最小值为1，求a.