绝密★启用前

2023 届高三 10 月统一调研测试

数学文科

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid\sqrt{x}\leqslant 2\}$, $B=\{x\mid y=\lg(x-2)\}$, 则 $A\cap B=$

A. $[0,2)$　　B. $(0,2)$　　C. $(2,4]$　　D. $[2,4]$

2. 对于非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=0$”是“$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 命题“对于任意无理数 x,都有 x^2 是有理数”的否定是

A. 对于任意有理数 x,都有 x^2 是有理数　　B. 对于任意无理数 x,都有 x^2 是无理数

C. 存在无理数 x,使得 x^2 是无理数　　D. 存在无理数 x,使得 x^2 是有理数

4. 已知在矩形 $ABCD$ 中,$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,线段 AC,BD 交于点 O,则 $\overrightarrow{EO}=$

A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$　　B. $\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$　　C. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$　　D. $\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

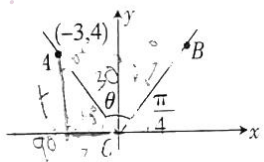
5. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中,$a_3=1$,$a_5\cdot a_9=16$,则 $a_9=$

A. 8　　B. -8　　C. 16　　D. -16

6. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,定义 $\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}\sin\theta-\boldsymbol{b}\cos\theta|$,已知 $\boldsymbol{a}=(3,4)$,$\boldsymbol{b}=(4,-3)$,则 $\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{b}=$

A. $(3,4)$　　B. $(-4,3)$　　C. 5　　D. 25

7. 如图,在平面直角坐标系 xOy 中,已知点 $A(-3,4)$,$\angle BOx=\frac{\pi}{4}$,记 $\angle AOB=\theta$,则 $\sin 2\theta=$



A. $-\frac{7}{25}$　　B. $\frac{7}{9}$　　C. $-\frac{7}{9}$　　D. $\frac{7}{25}$

8. 若两个函数的图象经过若干次平移后能够重合，则称这两个函数为“同形”函数，下列结论中错误的是

A. $f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=\cos x$ 是“同形”函数

B. $f(x)=\tan x$ 与 $g(x)=\cot x$ 是“同形”函数

C. $f(x)=2^x$ 与 $g(x)=3\times 2^x$ 是“同形”函数

D. $f(x)=\log_2 x$ 与 $g(x)=\log_2 2x$ 是“同形”函数

9. 已知函数 $f(x)=2|\sin x|+\cos 2x$，则下列结论中错误的是

A. $f(x)$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$

B. $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增

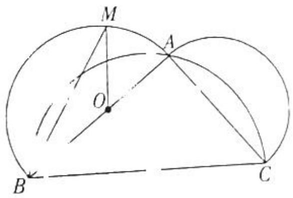
C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称

D. $f(x)$ 的最小正周期为 π

10. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_5=\frac{9}{8}$，数列 $\{2^n S_n\}$ 是公差为 7 的等差数列，则 $\{a_n\}$ 的最小项为

A. -2　　B. $-\frac{15}{16}$　　C. -1　　D. $\frac{1}{4}$

11. 下图来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形. 此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为 Rt△ABC 的斜边 BC、直角边 AB，AC. 已知在 Rt△ABC 中，$BC=4$，$\angle ABC=30^\circ$，O 为边 AB 的中点，M 为以 AB 为直径的半圆弧上一点，且 $\sin\angle MBC=\frac{3}{5}$，则 $\cos\angle MOA=$



A. $\frac{7-24\sqrt{3}}{50}$　　B. $\frac{7+24\sqrt{3}}{50}$　　C. $\frac{24-7\sqrt{3}}{50}$　　D. $\frac{24+7\sqrt{3}}{50}$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x<1\\ \ln x, & x\geqslant 1\end{cases}$，则方程 $f(x)=\frac{x}{e}$ 的解的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},2\cos\theta+1)$，$\boldsymbol{n}=(1,2\sin\theta)$，且 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，则 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=$ ______.

14. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x)=f(x)$，且当 $x\in[0,1]$ 时 $f(x)=2^x-m$，则 $f(2.5)=$ ______.

15. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}a_n<0\ (n\in\mathbf{N}^*)$，且其前 n 项和 $S_n>0$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可以是 $a_n=$ ______.（写出一个符合条件的即可）

16. 已知△ABC 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$a+\frac{b}{2}=c\sin\left(B+\frac{\pi}{2}\right)$，角 C 的平分线 CM 交 AB 于点 M，若 $AM=2BM=2$，则 $CM=$ ______.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)$ 的图象上两个相邻[illegible]中心间的距离为[illegible]函数 $f(x)$ 的一个零点.

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）求函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调递减区间.

18.（本小题满分 12 分）

已知 $f(x)=\frac{x^2-2ax+1}{e^x}$

（1）当 $a=0$ 时，求函数 $f(x)$ 的图象在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）求 $f(x)$ 的单调区间

19.（本小题满分 12 分）

已知 $\triangle ABC$ 中的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$a\sin 2B+b\sin A=0$.

（1）求 B；

（2）从下面 3 个条件中任选 1 个，求 b 的最小值.

①$\triangle ABC$ 的面积 $S=\sqrt{3}(b+1)$；②$\triangle ABC$ 的周长 $l=4+2\sqrt{3}$；③$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\leqslant -1$.

注：如选择多个条件分别解答，则按第一个解答计分.

(本小题满分 12 分)

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且$\{a_n-\frac{S_n}{n}\}$是公差为$\frac{1}{2}$的等差数列.

(1)求证：$\{a_n\}$是等差数列；

(2)用 $\max\{p,q\}$ 表示 p,q 中的最大值，若 $a_1=1$，$b_n=\max\{2^n,a_n^2\}$，求数列$\{a_nb_n\}$的前 n 项和 T_n.

.(本小题满分 12 分)

已知函数$f(x)+f'(2\pi)x=\frac{x^2}{\pi}-\cos x$.

(1)求$f(x)$的解析式；

(2)求$f(x)$在区间$[0,\pi]$上的最值.

2.(本小题满分 12 分)

已知函数$f(x)=x\ln x+\frac{a}{2}x^2-x(a\in\mathbf{R})$，且$f(x)$在$(0,+\infty)$内有两个极值点$x_1,x_2(x_1<x_2)$.

(1)求实数 a 的取值范围；

(2)求证：$a+\frac{2}{x_1+x_2}<0$.

2023届高三10月统一调研测试

数学文科参考答案及评分细则

1.【答案】C

【解析】∵ $A=\{x|\sqrt{x}\leq 2\}=\{x|0\leq x\leq 4\}$，$B=\{x|y=\lg(x-2)\}=\{x|x>2\}$，则 $A\cap B=(2,4]$，故选 C.

2.【答案】A

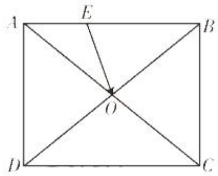
【解析】因为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=0$，所以 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 取 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$，满足 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，但不满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=0$，所以“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=0$”是“$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$”成立的充分不必要条件，故选 A.

3.【答案】C

【解析】由全称命题的否定为特称命题可得“对于任意无理数 x，都有 x^2 是有理数”的否定为“存在无理数 x，使得 x^2 是无理数”，故选 C.

4.【答案】D

【解析】作出图形如下所示，则 $\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，故选 D.



5.【答案】A

【解析】设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由 $a_5\cdot a_9=16$，可得 $a_7^2=16$，又 $a_3=1>0$，所以 $a_7=4$，从而 $q^4=\frac{a_7}{a_3}=4$，即 $q^2=2$，所以 $a_9=a_7q^2=8$，故选 A.

6.【答案】C

【解析】易知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $\theta=\frac{\pi}{2}$，所以 $\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}\sin\theta-\boldsymbol{b}\cos\theta|=|\boldsymbol{a}|=5$，故选 C.

7.【答案】D

【解析】由图可知，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$，$\sin 2\theta=-\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)=2\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-1=2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}$，故选 D.

8.【答案】B

【解析】因为 $g(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=\cos x$ 是“同形”函数，故 A 正确；因为 $g(x)=\cot x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$，所以 $f(x)=\tan x$ 与 $g(x)=\cot x$ 不是“同形”函数，故 B 错误；因为 $g(x)=3\times 2^x=2^{x+\log_2 3}$，所以 $f(x)=2^x$ 与 $g(x)=3\times 2^x$ 是“同形”函数，故 C 正确；因为 $g(x)=\log_2 2x=\log_2 x+1$，所以 $f(x)=\log_2 x$ 与 $g(x)=\log_2 2x$ 是“同形”函数，故 D 正确，故选 B.

9.【答案】B

【解析】因为 $f(x)=2|\sin x|+\cos 2x=2|\sin x|+1-2\sin^2 x=-2\left(|\sin x|-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\leq\frac{3}{2}$，故 A 正确；又因为 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|+\cos\frac{\pi}{2}=\sqrt{2}$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\left|\sin\frac{\pi}{3}\right|+\cos\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}-\frac{1}{2}$，所以 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)>f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，故 B 错误；$f(2\pi-x)=2|\sin(2\pi-x)|+\cos[2(2\pi-x)]=2|\sin x|+\cos 2x=f(x)$，故 C 正确；因为 $g(x)=|\sin x|$，$h(x)=\cos 2x$ 的最小正周期均为 π，所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π，故 D 正确，故选 B.

10.【答案】C

【解析】由题意得 $2^5S_5=36$，所以 $2^nS_n=36+7(n-5)=7n+1$，所以 $S_n=\frac{7n+1}{2^n}$. 当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=4$；当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{7n+1}{2^n}-\frac{7n-6}{2^{n-1}}=\frac{13-7n}{2^n}$，所以 $a_n=\begin{cases}4, n=1,\\ \frac{13-7n}{2^n}, n\geqslant 2,\end{cases}$ 可知 $a_2=-\frac{1}{4}<a_1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_{n+1}-a_n=\frac{6-7n}{2^{n+1}}-\frac{13-7n}{2^n}=\frac{7n-20}{2^{n+1}}$，则当 $n=2$ 时，$a_2>a_3$；当 $n\geqslant 3$ 时，$a_{n+1}>a_n$，此时 $\{a_n\}$ 单调递增，即 $a_3<a_4<a_5<\cdots$，所以 $\{a_n\}$ 的最小项为 $a_3=-1$，故选 C.

11.【答案】B

【解析】记 $\angle MBA=\alpha$，则 $\angle MOA=2\alpha$. 由 $\sin(\alpha+30°)=\frac{3}{5}$，又 $30°\leqslant\angle MBC<120°$，则 $\cos(\alpha+30°)=\frac{4}{5}$，则 $\cos[2(\alpha+30°)]=2\cos^2(\alpha+30°)-1=2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}$，$\sin[2(\alpha+30°)]=2\sin(\alpha+30°)\cos(\alpha+30°)=2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$，所以 $\cos\angle MOA=\cos 2\alpha=\cos[2(\alpha+30°)-60°]=\cos[2(\alpha+30°)]\cos 60°+\sin[2(\alpha+30°)]\cdot\sin 60°=\frac{7}{25}\times\frac{1}{2}+\frac{24}{25}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7+24\sqrt{3}}{50}$，故选 B.

12.【答案】C

【解析】当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)=\frac{x}{e}$ 等价于 $\ln x=\frac{x}{e}$，令 $g(x)=\ln x-\frac{x}{e}$，$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=\frac{e-x}{ex}$，当 $x\in[1,e)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，所以 $g(x)$ 的最大值为 $g(e)=0$，所以方程 $\ln x=\frac{x}{e}$ 只有唯一解 $x=e$；当 $x<1$ 时，$f(x)=\frac{x}{e}$ 等价于 $1-x^2=\frac{x}{e}$，易知方程 $1-x^2=\frac{x}{e}$ 有两个解. 综上，方程 $f(x)=\frac{x}{e}$ 的解的个数为 3 个，故选 C.

13.【答案】$\frac{1}{4}$（没有约分或写成小数不扣分）

【解析】因为 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，所以 $2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta-1=0$，从而 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$.

14.【答案】$1-\sqrt{2}$（写成 $1-2^{0.5}$ 或 $1-2^{\frac{1}{2}}$ 不扣分）

【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，即 $f(0)=1-m=0$，解得 $m=1$，因为 $f(2-x)=f(x)$，$f(x)=2^x-1, 0\leqslant x\leqslant 1$，所以 $f(2.5)=f(2-2.5)=f(-0.5)=-f(0.5)=-(2^{0.5}-1)=1-\sqrt{2}$.

15.【答案】$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$（满足 $a_1>0$，$-1<q<0$ 的等比数列都符合题意）

【解析】由题意知，设等比数列的公比为 q，由 $a_{n+1}a_n<0$，得 $q=\frac{a_{n+1}}{a_n}<0$，因为 $S_n>0$，所以 $a_1=S_1>0$，由 $S_n>0$ 得 $\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}>0$，所以 $1-q^n>0$，要使 $1-q^n>0$ 对任意的 n 都成立，得 $-1<q<0$. 则 $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 可满足上述条件.

16.【答案】$\frac{2\sqrt{7}}{7}$（没有约分或分母有理化均不扣分）

【解析】依题意，$a+\frac{b}{2}=c\sin\left(B+\frac{\pi}{2}\right)$，故 $\sin A+\frac{\sin B}{2}=\sin C\cos B$，而 $\sin B\cos C+\sin C\cos B+\frac{\sin B}{2}=\sin C\cdot\cos B$，解得 $\cos C=-\frac{1}{2}$，$C=120°$，因为 CM 为角平分线，故 $\frac{AC}{BC}=\frac{AM}{BM}=2$，设 $BC=x$，$AC=2x$，故在 $\triangle ACB$ 中，由余

弦定理得，$\cos\angle ACB=\frac{BC^2+AC^2-AB^2}{2BC\cdot AC}=\frac{5x^2-9}{4x^2}=-\frac{1}{2}$，解得 $x=\frac{3\sqrt{7}}{7}$，而 $S_{\triangle ACB}=S_{\triangle ACM}+S_{\triangle BCM}$，即 $\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{7}}{7}\times\frac{6\sqrt{7}}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{6\sqrt{7}}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot CM+\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{7}}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot CM$，解得 $CM=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

17. 解：(1) ∵ 函数 $f(x)$ 的图象上两个相邻对称中心间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，

$\therefore T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，$\therefore \omega=2$，(1 分)

$\therefore f(x)=2\sin(2x+\varphi)$.

$\because \frac{7\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 的一个零点，$\therefore f\left(\frac{7}{12}\pi\right)=2\sin\left(\frac{7}{6}\pi+\varphi\right)=0$，

$\therefore \frac{7\pi}{6}+\varphi=k\pi, k\in\mathbf{Z}$，从而 $\varphi=k\pi-\frac{7\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}$. (3 分)

$\because |\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore k=1, \varphi=-\frac{\pi}{6}$，$\therefore f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$. (5 分)

(2) 由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，(7 分)

得 $\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$，(8 分)

又 $x\in[0,\pi]$，令 $k=0$，得 $\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}$，(9 分)

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$. (10 分)

【评分细则】

第(2)问单调递减区间写成 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$ 不扣分.

18. 解：(1) 当 $a=0$ 时，$f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$，所以 $f(0)=1$，(1 分)

又 $f'(x)=-\frac{(x-1)^2}{e^x}$，所以 $f'(0)=-1$. (3 分)

从而函数 $f(x)$ 的图象在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=-x+1$. (5 分)

(2) $f'(x)=-\frac{x^2-(2a+2)x+2a+1}{e^x}=-\frac{(x-1)[x-(2a+1)]}{e^x}$，(7 分)

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$，$(2a+1,+\infty)$ 上单调递减，在 $(1,2a+1)$ 上单调递增；(8 分)

当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；(10 分)

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,2a+1)$，$(1,+\infty)$ 上单调递减，在 $(2a+1,1)$ 上单调递增. (12 分)

【评分细则】

(1) 第(1)问切线方程写成 $x+y-1=0$ 不扣分.

(2) 第(2)问单调区间写成闭区间不扣分.

19. 解：(1) 由 $a\sin 2B+b\sin A=0$ 得 $2a\sin B\cos B+b\sin A=0$，

由正弦定理得 $2ab\cos B+ab=0$，(2 分)

因为 $ab\neq0$，

所以 $\cos B=-\frac{1}{2}$，$B=\frac{2\pi}{3}$. (5 分)

(2) 若选①：

由 $S=\sqrt{3}(b+1)$ 得 $\frac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}(b+1)$，即 $ac=4(b+1)$，(8 分)

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2+ac\geqslant 3ac=12(b+1)$，

所以 $b^2-12b-12\geqslant 0$，(10 分)

解得 $b\geqslant 6+4\sqrt{3}$，当且仅当 $a=c=4+2\sqrt{3}$ 时取等号.

所以 b 的最小值为 $6+4\sqrt{3}$. (12 分)

若选②：

由 $l=a+b+c=4+2\sqrt{3}$，得 $a+c=4+2\sqrt{3}-b$，(8 分)

由 $\cos B=-\frac{1}{2}$ 及余弦定理得 $b^2=a^2+c^2+ac=(a+c)^2-ac\geqslant(a+c)^2-\frac{1}{4}(a+c)^2=\frac{3}{4}(a+c)^2$，

所以 $b\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(a+c)=\frac{\sqrt{3}}{2}(4+2\sqrt{3}-b)$，(10 分)

所以 $b\geqslant 2\sqrt{3}$，当且仅当 $a=c=2$ 时取等号，

所以 b 的最小值为 $2\sqrt{3}$. (12 分)

若选③：

由 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=c\cdot a\cdot\cos B=-\frac{1}{2}ac\leqslant -1$，故 $ac\geqslant 2$，(9 分)

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2+ac\geqslant 3ac\geqslant 6$，当且仅当 $a=c=\sqrt{2}$ 时取等号，(11 分)

所以 b 的最小值为 $\sqrt{6}$. (12 分)

【评分细则】

第(2)问没有说明取等条件扣 1 分.

20. (1) 证明：易知数列 $\{a_n-\frac{S_n}{n}\}$ 的首项为 $a_1-S_1=0$，从而 $a_n-\frac{S_n}{n}=\frac{n-1}{2}$. (2 分)

化简得 $2na_n-2S_n=n^2-n$，进一步得 $2S_n=2na_n+n-n^2$.

则 $2S_{n-1}=2(n-1)a_{n-1}+n-1-(n-1)^2$. (4 分)

两式相减，得 $(2n-2)a_n-(2n-2)a_{n-1}=2n-2$，$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}^*$，

即 $a_n-a_{n-1}=1$，$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}^*$，$\therefore\{a_n\}$ 是等差数列. (5 分)

(2) 解：因为 $a_1=1$，所以 $a_n=1+(n-1)=n$. (6 分)

$b_1=\max\{2,1\}=2$，$b_2=\max\{2^2,2^2\}=2^2$，$b_3=\max\{2^3,3^2\}=3^2$，

$b_n=\max\{2^n,n^2\}=2^n(n\geqslant 4)$，(7 分)

$T_1=2$，$T_2=10$，(8 分)

当 $n\geqslant 3$ 时，

$T_n=1\times 2+2\times 2^2+3\times 3^2+4\times 2^4+\cdots+n\cdot 2^n$，

$\quad=1\times 2+2\times 2^2+3\times 2^3+4\times 2^4+\cdots+n\cdot 2^n+3$，

记 $A_n=1\times 2+2\times 2^2+3\times 2^3+4\times 2^4+\cdots+n\cdot 2^n$①，

则 $2A_n=1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+4\times 2^5+\cdots+n\cdot 2^{n+1}$②，

①减②得 $-A_n=2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=(1-n)2^{n+1}-2$，

所以 $A_n=(n-1)2^{n+1}+2$，从而 $T_n=(n-1)2^{n+1}+5$. (11 分)

综上 $T_n=\begin{cases}2, n=1\\10, n=2\\(n-1)2^{n+1}+5, n\geqslant 3\end{cases}$. (12 分)

【评分细则】

第(2)问如果 T_n 没有写成分段形式扣 1 分.

数学文科　第 4 页(共 6 页)

21. 解：(1)由 $f(x)+f'(2\pi)x=\frac{x^2}{\pi}-\cos x$，得 $f(x)=\frac{x^2}{\pi}-\cos x-f'(2\pi)x$，

两边求导得 $f'(x)=\frac{2}{\pi}x+\sin x-f'(2\pi)$，(2 分)

令 $x=2\pi$ 得，$f'(2\pi)=4-f'(2\pi)$，解得 $f'(2\pi)=2$，(4 分)

从而 $f(x)=\frac{x^2}{\pi}-\cos x-2x$.(5 分)

(2)求导得 $f'(x)=\frac{2}{\pi}x+\sin x-2$，易得 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'(\pi)=0$，(6 分)

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\frac{2}{\pi}x<1$，$\sin x<1$，从而 $f'(x)=\frac{2}{\pi}x+\sin x-2<0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减.(7 分)

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，令 $g(x)=\frac{2}{\pi}x+\sin x-2$，$g'(x)=\frac{2}{\pi}+\cos x$，

易知存在 $x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 使得 $g'(x_0)=0$，

且 $x\in\left(\frac{\pi}{2},x_0\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，$x\in(x_0,\pi)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，(9 分)

又 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，$g(\pi)=0$，所以当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$，

从而 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调递增.(10 分)

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{3\pi}{4}$，(11 分)

又 $f(0)=-1$，$f(\pi)=-\pi+1$，所以 $f(\pi)<f(0)$，从而 $f(x)$ 的最大值为 $f(0)=-1$.(12 分)

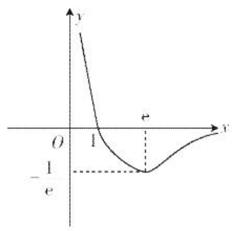
【评分细则】

第(2)问如果直接用数形结合，画出 $y=\sin x$ 和 $y=2-\frac{2}{\pi}x$ 的图像来判断 $f'(x)$ 的零点和正负，从而得出 $f(x)$ 的单调性并求出最值，酌情给分.

22. (1)解：$f'(x)=\ln x+ax$，因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个极值点，

所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个零点，即方程 $\ln x+ax=0$ 有两个根，

即 $a=-\frac{\ln x}{x}$ 有两个根，(2 分)



令 $g(x)=-\frac{\ln x}{x}$，$g'(x)=\frac{\ln x-1}{x^2}$，

当 $x\in(0,e)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递减，

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递增，

又 $g(e)=-\frac{1}{e}$，画出函数 $g(x)$ 的图象如图所示，(4 分)

由方程 $a=-\frac{\ln x}{x}$ 有两个根，得 $-\frac{1}{e}<a<0$.(5 分)

(2)证明：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个极值点 x_1,x_2，由(1)可知，

$\begin{cases}\ln x_1+ax_1=0,\\ \ln x_2+ax_2=0,\end{cases}$ 则 $a=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_2-x_1}$.(7 分)

要证 $a+\frac{2}{x_1+x_2}<0$，只需 $\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_2-x_1}+\frac{2}{x_1+x_2}<0$.

进一步化为$\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_2-x_1}<-\dfrac{2}{x_1+x_2}$,

从而得 $\ln x_1-\ln x_2<\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}$,所以 $\ln\dfrac{x_1}{x_2}<\dfrac{2\left(\dfrac{x_1}{x_2}-1\right)}{\dfrac{x_1}{x_2}+1}$,(9 分)

设 $t=\dfrac{x_1}{x_2}$,可知 t 的取值范围是$(0,1)$,则只需证 $\ln t<\dfrac{2(t-1)}{t+1}$,(10 分)

令 $h(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}$,则 $h'(t)=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$,(11 分)

所以 $h(t)$ 在$(0,1)$上单调递增,从而 $h(t)<h(1)=0$,

因此 $a+\dfrac{2}{x_1+x_2}<0$.(12 分)

【评分细则】

第(1)问直接研究 $y=\ln x+ax$ 的图象与 x 轴有两个交点,求出 a 的取值范围,不扣分.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。