淮北市2023届高三第二次模拟考试数学参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	B	C	D	A	B	D	AD	AB	ABC	ACD

二、填空题

13. 240　　14. $-\frac{1}{9}$　　15. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　16. $\frac{1}{2}$;1023132

三、解答题

17. **解：**(1) 注意到 $\frac{a_{n+1}}{3a_n}=1+\frac{1}{n}$，得 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=3\frac{a_n}{n}$，$\frac{a_1}{1}=1$.

$\therefore \{\frac{a_n}{n}\}$ 是以1为首项，3为公比的等比数列，

$\therefore \frac{a_n}{n}=3^{n-1}$，$a_n=n\times 3^{n-1}$，$b_n=\frac{n-7}{3^{n-1}}$ ……………………2分

当 $n\le 7$ 时，b_n 不会最大；当 $n>7$ 时，设 b_n 是最大项，即 $b_n\ge b_{n-1}$，且 $b_n\ge b_{n+1}$.

$\therefore \begin{cases}\frac{n-7}{3^{n-1}}\ge\frac{n-8}{3^{n-2}}\\ \frac{n-7}{3^{n-1}}\ge\frac{n-6}{3^n}\end{cases}$，得 $\begin{cases}n-7\ge 3(n-8)\\ 3(n-7)\ge n-6\end{cases}$，解得 $\frac{15}{2}\le n\le\frac{17}{2}$

又 $n\in N$　$\therefore n=8$，$\therefore \{b_n\}$ 的最大项为 $b_8=\frac{1}{3^7}=\frac{1}{2187}$. ……………………5分

(2) $S_n=1\times 3^0+2\times 3^1+\cdots+n\times 3^{n-1}$.　①

①×3得 $3S_n=1\times 3^1+2\times 3^2+\cdots+n\times 3^n$.　②……………………7分

①−②得 $-2S_n=1+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}-n\times 3^n=\frac{1-3^n}{1-3}-n\times 3^n=\frac{3^n-1}{2}-n\times 3^n$ …9分

$\therefore S_n=\frac{(2n-1)3^n+1}{4}$. ……………………10分

18. **解：**(1) $c(\sin C-\sqrt{3}\sin B)=(a-b)(\sin A+\sin B)$，

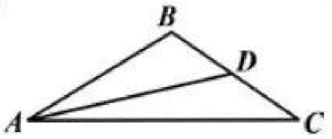
正弦定理得 $c(c-\sqrt{3}b)=(a-b)(a+b)$，……………………2分

即 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos A$，所以 $A=\frac{\pi}{6}$. ……………………4分

(2) 注意到 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}$，结合(1)得 $bc=4\sqrt{3}$．……5分

$\sin B=1+\cos C$，得 $\sin B=1+\cos(\frac{5\pi}{6}-B)=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B$．

即 $\frac{1}{2}\sin B-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B=1$，$\sin(B-\frac{\pi}{3})=1$，得 $B=\frac{5\pi}{6}$．……8分



所以△ ABC 为等腰三角形，$b=\sqrt{3}c$．

结合 $bc=4\sqrt{3}$，得 $a=c=2$，$b=2\sqrt{3}$．……10分

注意到 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，所以 $\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}(c^2+b^2+2cb\cos\frac{\pi}{6})$

$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{\frac{1}{4}(4+12+2\times2\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2})}=\sqrt{7}$．……12分

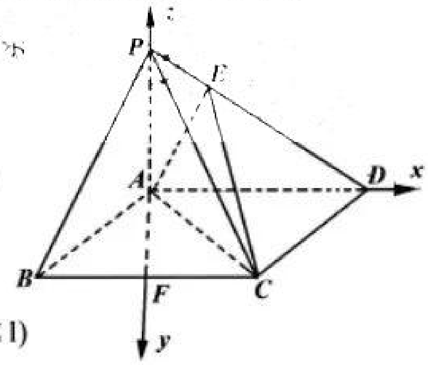
19. 解：(1) 证明：注意到底面 $ABCD$ 为菱形， 所以 $BD\perp AC$；

又 $PC\perp BD$，所以 $BD\perp$ 面 PAC，所以 $BD\perp PA$，……3分

又 $PA=AB=\frac{\sqrt{2}}{2}PB$，所以 $PA\perp AB$．

结合 $BD\perp PA$，$PA\perp AB$ 得 $PA\perp$ 面 $ABCD$．……5分

(2) 取线段 BC 的中点 F，结合题设及(1)的结论，如图所示建立空间直角坐标系．



不妨设 $AB=2$，则 $P(0,0,2)$，$D(2,0,0)$，$C(1,\sqrt{3},0)$

$B(-1,\sqrt{3},0)$．

假设存在 $E(x,y,z)$ 符合条件，设 $\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PD}$，$(0\le\lambda\le1)$

即 $(x,y,z-2)=\lambda(2,0,-2)$，即 $x=2\lambda$，$y=0$，$z=2-2\lambda$，

所以 $E(2\lambda,0,2-2\lambda)$．……8分

易知，平面 PAB 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$（若 CD 中点为 G，$\overrightarrow{n_1}$ 即为 $\overrightarrow{AG}$）.

注意到 $\overrightarrow{AC}=(1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AE}=(2\lambda,0,2-2\lambda)$，设平面 ACE 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0\\2\lambda x+(2-2\lambda)z=0\end{cases}$，令 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $x=1$，$z=\frac{\lambda}{\lambda-1}$，

即 $\overrightarrow{n_2}=(1,-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\lambda}{\lambda-1})$． ……………………………………………………10 分

题设知 $\frac{\sqrt{39}}{13}=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{1+\frac{1}{3}+(\frac{\lambda}{\lambda-1})^2}}$，即 $\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}+(\frac{\lambda}{\lambda-1})^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{13}{9}}}$，所以

$(\frac{\lambda}{\lambda-1})^2=\frac{1}{9}$，得 $\lambda=-\frac{1}{2}$（舍）或 $\lambda=\frac{1}{4}$．

综上，$\lambda=\frac{1}{4}$ 时符合条件，此时点 E 为线段 PD 的靠近点 P 的四等分点． ………12 分

20. 解：（1）由题意得：$\frac{m}{p}+m+m(1-p)+m(1-p)^2=2m+m+\frac{1}{2}m+\frac{1}{4}m=1$

解得 $m=\frac{4}{15}$ ……………………………**1 分**

又 $P(B|A_0)=0$，$P(B|A_1)=C_1^1\frac{1}{2}$，$P(B|A_2)=C_2^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$，$P(B|A_3)=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3$ ………**4 分**

且 $B=BA_0+BA_1+BA_2+BA_3$

由全概率公式，得 $P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(B|A_i)P(A_i)$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{p}+C_2^2\left(\frac{1}{2}\right)^2m+(C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3)$$

$$=\frac{m}{2p}+\frac{m}{4}+\frac{1}{2}m(1-p)$$

由 $p=\frac{1}{2}$，得 $P(B)=\frac{2}{5}$； ………**6 分**

（2）由题意得：$P(\xi=2)=m$，考虑 m 的变化即可

由 $\frac{m}{p}+m+m(1-p)+m(1-p)^2=1$ 得 $\frac{1}{m}=p^2-3p+\frac{1}{p}+3$ ………**7 分**

设 $f(p)=p^2-3p+\frac{1}{p}+3$，$0<p<1$，则 $f'(p)=\frac{2p^3-3p^2-1}{p^2}$

记 $g(p)=2p^3-3p^2-1$，则 $g'(p)=6p^2-6p=6p(p-1)<0$

故 $g(p)$ 在 $(0,1)$ 单调递减．

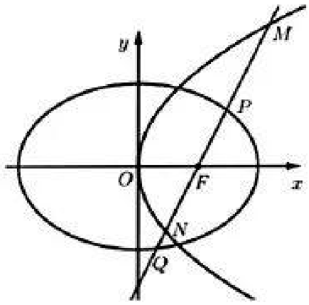
$\because g(0)=-1$，$\therefore g(p)<0$，$\therefore f'(p)<0$，$f(p)$ 在 $(0,1)$ 单调递减．

因此，增加 p 的取值，$\dfrac{1}{m}$ 会减小，m 增大，即 $P(\xi=2)$ 增大. ....**12 分**

21. （1）**解**：在抛物线中

由题意知 $2p=4$，得 $p=2$

$\therefore$ 抛物线方程是 $y^2=4x$



在椭圆中，$\dfrac{2b^2}{a}=3, c=1$

得 $a^2=4, b^2=3$

$\therefore$ 椭圆方程：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ .... **5 分**

（2）**解**：假设存在这样的 l，

设直线 l 的方程为：$x=ky+1$，设 $M(x_1,y_1), N(x_2,y_2)$，

联立方程 $\begin{cases} x=ky+1 \\ y^2=4x \end{cases}$ 消 x 化简得 $y^2-4ky-4=0$

得 $y_1+y_2=4k, y_1y_2=-4$，进一步得 $\Delta=16k^2+16$

$|MN|=\sqrt{1+k^2}\,|y_1-y_2|=4(k^2+1)$ .... **7 分**

设 $P(x_3,y_3)$ $Q(x_4,y_4)$

联立方程 $\begin{cases} x=ky+1 \\ y^2=4x \end{cases}$ 消 x 化简得 $(3k^2+4)y^2+6ky-9=0$

得 $y_3+y_4=\dfrac{-6k}{3k^2+4}, y_3y_4=\dfrac{-9}{3k^2+4}$，进一步得 $\Delta=144(k^2+1)$，

$\therefore |PQ|=\sqrt{1+k^2}\,|y_3-y_4|=\dfrac{12(k^2+1)}{3k^2+4}$ .... **9 分**

$\therefore \dfrac{1}{|MN|}+\dfrac{m}{|PQ|}=\dfrac{1}{4(k^2+1)}+\dfrac{m(3k^2+4)}{12(k^2+1)}=\dfrac{3mk^2+4m+3}{12(k^2+1)}$ 若为定值

$\therefore \dfrac{3m}{12}=\dfrac{4m+3}{12}$ 得 $m=-3$

$\therefore$ 存在常数 $m=-3$，使 $\dfrac{1}{|MN|}+\dfrac{m}{|PQ|}$ 为定值 $-\dfrac{3}{4}$. .... **12 分**

另：也可设直线的倾斜角，用焦半径公式表示更易得，也可同样给分！

22. 解：（1） $f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}-\dfrac{a}{1-x}=\dfrac{(1-x)^2-ae^x}{(1-x)e^x}$，$(x<1)$ ……………………… 1 分

①当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$，此时，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递增； …………………… 2 分

②当 $a>0$ 时，令 $g(x)=(1-x)^2-ae^x$，可以判断 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 是减少的

注意到：$g(-a-1)=(a+2)^2-ae^{-a-1}>(a+2)^2-a>0$

$g(1)=-ae<0$

则必存在 $x_0\in(-\infty,1)$ 使得 $g(x_0)=0$，即 $(1-x_0)^2-ae^{x_0}=0$ ………………4 分

且当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$g(x)>0$，于是 $f'(x)>0$，此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 单调递增；

当 $x\in(x_0,1)$ 时，$g(x)<0$，于是 $f'(x)<0$，此时 $f(x)$ 在 $(x_0,1)$ 单调递减； ……5 分

（2）当 $a>0$ 时，令 $h(x)=f'(x)$，则：

$h'(x)=\dfrac{(x-1)^2(x-2)-ae^x}{(x-1)^2e^x}<0$ 于是：$f'(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 是减少的 ………7 分

对于给定的 $x_2\in(-\infty,0)$，令 $\varphi(x)=f(x+x_2)-f(x)-f(x_2)$，$x\in(-\infty,0)$

则 $\varphi'(x)=f'(x+x_2)-f'(x)$

因为 $x+x_2<x$ 所以 $f'(x+x_2)>f'(x)$，即 $\varphi'(x)>0$

因此 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 是增加的 ……………………………………………………10 分

于是，$\varphi(x)<\varphi(0)=-f(0)=0$，即：$f(x+x_2)<f(x)+f(x_2)$

进而 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$ …………………………………………………12 分

方法二：

当 $a>0$ 时，对于给定的 $x_2\in(-\infty,0)$，令 $\varphi(x)=f(x+x_2)-f(x)-f(x_2)$，$x_2\in(-\infty,0)$

则 $\varphi'(x)=f'(x+x_2)-f'(x)=\dfrac{1-x-x_2}{e^{x+x_2}}-\dfrac{a}{1-x-x_2}-\dfrac{1-x}{e^x}+\dfrac{a}{1-x}$

$=\dfrac{1-x-x_2-(1-x)e^{x_2}}{e^{x+x_2}}+a(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x-x_2})$

$>\dfrac{1-x-x_2-(1-x)}{e^{x+x_2}}+a(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x-x_2})=\dfrac{-x_2}{e^{x+x_2}}+a(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x-x_2})>0$

因此 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 是增加的

于是，$\varphi(x)<\varphi(0)=-f(0)=0$，即：$f(x+x_2)<f(x)+f(x_2)$

进而 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$