

2021—2022 学年度第一学期期中质量检测

高三数学试题

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $M=\{1,3,5,7,9\}$, $N=\{x|2^x>7\}$, 则 $M\cap N=$ ()

- A. $\{7,9\}$ B. $\{5,7,9\}$ C. $\{3,5,7,9\}$ D. $\{1,3,5,7,9\}$

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3+a_7=6$, 则 $a_2+a_8=$ ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

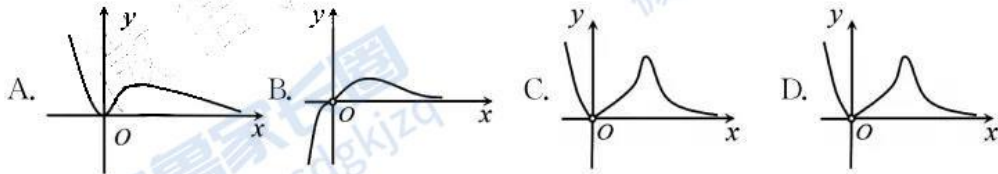
3. 已知 $a=\log_{0.2}3$, $b=2^{0.3}$, $c=0.3^{0.2}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a<b<c$ B. $b<c<a$ C. $a<c<b$ D. $b<a<c$

4. 若 $\tan\theta=2$, 则 $\sin 2\theta=$ ()

- A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$

5. 函数 $f(x)=\frac{x^2}{3^x-1}$ 的图象大致是 ()



6. 设 $2^a=3^b=m$, 且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$, 则 $m=$ ()

- A. $\sqrt{10}$ B. $\sqrt{6}$ C. 10 D. 6

7. 已知函数 $f(x)=a\sin 3x+bx^3+3(a\in R, b\in R)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 $f(2021)+f(-2021)+f'(2022)-f'(-2022)=$ ()

- A. 0 B. 2021 C. 2022 D. 6

8. 已知函数 $f(x)=|x|+\frac{a}{x}-2$, 若函数 $y=f(x-a)$ 有三个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-1,0)\cup(0,1)$ B. $(-3,0)\cup(0,3)$
C. $(-3\sqrt{2},0)\cup(0,3\sqrt{2})$ D. $(-6,0)\cup(0,6)$

高三数学试题 第 1 页 共 4 页

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 下列说法正确的是 ()

A. “ $x < -2$ ”是“ $\ln(x+3) < 0$ ”的必要不充分条件

B. 函数 $f(x) = \sqrt{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ 的最小值为 2

C. 当 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 时,“ $\alpha = \beta$ ”是“ $\sin \alpha = \sin \beta$ ”的充分不必要条件

D. 命题 $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x-2} > 0$, 的否定是 $\exists x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x-2} \leq 0$

10. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x$, 则下列结论不正确的是 ()

A. 函数 $y = f(x)$ 的最小正周期为 π

B. 将函数 $y = f(x)$ 的图象右移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后, 得到一个奇函数

C. $x = \frac{5\pi}{6}$ 是函数 $y = f(x)$ 的一条对称轴

D. $\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$ 是函数 $y = f(x)$ 的一个对称中心

11. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为其前 n 项和, $a_1 = 15$, $S_4 = S_{12}$, 则下列结论正确的是 ()

A. $d = -2$

B. $|a_4| = |a_{13}|$

C. S_n 的最大值为 S_9

D. 使得 $S_n > 0$ 的最大整数 $n = 15$

12. 已知函数 $f(x) = \ln x$, $x_1 > x_2 > e$, 则下列结论正确的是 ()

A. $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$

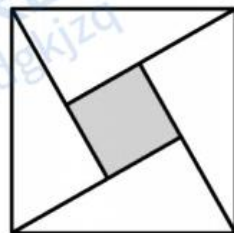
B. $\frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)] < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

C. $x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1) > 0$

D. $e(f(x_1) - f(x_2)) < x_1 - x_2$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 赵爽是我国古代数学家、天文学家. 约公元 222 年, 赵爽为《周髀算经》一书作序时, 介绍了“勾股圆方图”, 亦称“赵爽弦图”, 它是由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形. 如图是一张弦图, 已知大正方形的面积为 25, 小正方形的面积为 1, 若直角三角形较小的锐角为 α , 则 $\tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)$ 的值为 ▲ .



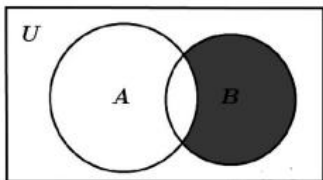
14. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2, a_6=64$, 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\log_2 a_n$, 则数列 $\left\{\frac{1}{b_n b_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 $S_n = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.
15. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{2x+a}$ 且 $f'(1) = \frac{1}{2}$, 则 $a = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$, 曲线 $y=f(x)$ 在 $x=e$ 处的切线斜率为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.
16. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 上是减函数, $f(-1)=0$, 则不等式 $f(\log_3 x) > 0$ 的解集为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知集合 $A = \{x | -1 < x \leq 5\}$, $B = \{x | a+1 \leq x \leq 3a-1\}$.

(1) 若 $a=3$, 求图中阴影部分 M ;



(2) 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

18. (12 分)

已知 p : 函数 $f(x) = (a-2m)^x$ 在 R 上单调递减, q : 关于 x 的方程 $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ 的两根都大于 1.

(1) 当 $m=3$ 时, p 是真命题, 求 a 的取值范围;

(2) 若 p 为真命题是 q 为真命题的充分不必要条件, 求 m 的取值范围.

19. (12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{2b}{a} - 1$.

(1) 判断三角形 $\triangle ABC$ 的形状;

(2) 记线段 AB 上靠近点 A 的三等分点为 D , 若 $CD = 2\sqrt{7}$, $b=6$, 求 c .

20. (12 分)

习总书记指出: “绿水青山就是金山银山”. 某市一乡镇响应号召, 因地制宜地将该镇打造成“生态水果特色小镇”. 调研过程中发现: 某水果树的单株产量 y (单位:

高三数学试题 第 3 页 共 4 页

千克)与施用发酵有机肥费用 $30x$ (单位:元)满足如下关系: $U(x) =$

$$\begin{cases} x^2 + 3, 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{10x}{1+x}, 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

,这种水果树单株的其它成本总投入为 100 元. 已知该水果的市
场售价为 75 元/千克,且销路畅通供不应求,记该水果树的单株利润为 $f(x)$ (单
位:元).

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2)当投入的肥料费用为多少元时,该单株水果树获得的利润最大? 最大利润是
多少?

21. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1} + a_n = 2n + 5 (n \in \mathbb{N}^*)$, 且 $a_1 = 3$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \begin{cases} 1, n=1 \\ \log_{(n+1)} a_n, n \geq 2, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$, 若 $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_k = 2, (k \in \mathbb{N}^*)$,

求 k 的值.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 (a > 0, b \in \mathbb{R})$ 有极值,且导函数 $f'(x)$ 的极值点
是 $f(x)$ 的零点.

(1)求 b 关于 a 的函数关系式,并写出定义域;

(2)求证: $b^2 > 3a$.

2021—2022 学年度第一学期期中质量检测

高三数学试题参考答案

1. CDCA 5.CBDA 9.ACD 10.BC 11.ABD 12.BCD

13. 7 14. $\frac{n}{n+1}$ 15. 0 0 16. $(\frac{1}{3}, 3)$

17.解: (1) $a=3$ 时, $B=\{x|4 \leq x \leq 8\}$, -----1 分

由韦恩图可知, $M=(C_U A) \cap B$ -----3 分

因为 $A=\{x|-1 < x \leq 5\}$

所以 $C_U A=\{x|x \leq -1 \text{ 或 } x > 5\}$ -----4 分

所以 $M=\{x|5 < x \leq 8\}$ -----5 分

(2) 当 $B=\emptyset$ 时, $3a-1 < a+1$, 解得 $a < 1$, 此时 $B \subseteq A$ 成立 -----6 分

当 $B \neq \emptyset$ 时, $3a-1 \geq a+1$, 解得 $a \geq 1$

因为 $B \subseteq A$, 所以 $\begin{cases} a+1 > -1 \\ 3a-1 \leq 5 \end{cases}$, 解得 $1 \leq a \leq 2$ -----8 分

综上可得, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$. -----10 分

18.解: (1) 因为 $m=3$, 所以 $f(x)=(a-6)^x$

因为 p 是真命题,

所以 $0 < a-6 < 1$, 解得 $6 < a < 7$.

故 a 的取值范围是 $(6, 7)$ -----4 分

(2) 若 p 是真命题, 则 $0 < a-2m < 1$, 解得 $2m < a < 2m+1$. -----6 分

关于 x 的方程 $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ 的两根分别为 $a-1$ 和 $a+1$. -----8 分

若 q 是真命题, 则 $a-1 > 1$, 解得 $a > 2$. -----10 分

因为 p 为真命题是 q 为真命题的充分不必要条件, 所以 $2m \geq 2$,

所以 $m \geq 1$. -----12 分

19.解: (1) 因为 $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{2b}{a} - 1$

所以由正弦定理得 $\frac{a}{b} = \frac{2b}{a} - 1$ -----2 分

整理得 $(a+2b)(a-b) = 0$. -----4 分

因为 $a+2b > 0$, 所以 $a=b$,

所以三角形为等腰三角形. -----6 分

(2) 设 $AD = x$, 则 $BD = 2x$,

由余弦定理可得 $\cos \angle CDB = \frac{4x^2 + 28 - 36}{2 \times 2x \times 2\sqrt{7}}$, -----7 分

$\cos \angle CDA = \frac{x^2 + 28 - 36}{2 \times x \times 2\sqrt{7}}$, -----8 分

因为 $\angle CDB = \pi - \angle CDA$, -----9 分

所以 $\frac{4x^2 + 28 - 36}{2 \times 2x \times 2\sqrt{7}} = -\frac{x^2 + 28 - 36}{2 \times x \times 2\sqrt{7}}$, -----10 分

解得 $x = 2$, -----11 分

所以 $c = AB = 3BD = 6$. -----12 分

20. 解: (1) 由题意得 $f(x) = 75x^2 - 30x - 100$,

$$\text{即 } f(x) = \begin{cases} 75x^2 - 30x + 125, 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{750x}{1+x} - 30x - 100, 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

$$\text{化简得 } f(x) = \begin{cases} 75x^2 - 30x + 125, 0 \leq x \leq 2 \\ 650 - \frac{750}{1+x} - 30x, 2 < x \leq 5 \end{cases} \quad \text{-----6 分}$$

(2) 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = 75x^2 - 30x + 125$

为对称轴 $x = \frac{1}{5}$ 开口向上的抛物线,

所以 $f(x)_{\max} = f(2) = 365$; -----8 分

$$\text{当 } 2 < x \leq 5 \text{ 时, } f(x) = 680 - 30 \left(\frac{25}{1+x} + 1 + x \right)$$

$\leq 680 - 60\sqrt{25} = 380$, -----10 分

当且仅当 $\frac{25}{1+x} = 1+x$ 即 $x = 4$ 时取等号, -----11 分

综上, 当投入的肥料费用为 $30 \times 4 = 120$ 元时, 微信搜《高三答案公众号》单株水果树获得的利润最大为 380 元, -----12 分

21. 解: (1) $\because a_{n+1} + a_n = 2n + 5$,

$$\therefore a_{n+1} + a_{n+2} = 2n + 7,$$

$$\therefore a_{n+2} - a_n = 2,$$

$\therefore \{a_n\}$ 的奇数项与偶数项各自成等差数列, 且公差均为 2, -----2 分

$$\because a_1 = 3, \therefore a_2 = 4,$$

$$\therefore a_{2n-1} = a_1 + 2(n-1) = 2n+1 = 2n-1+2 \Rightarrow a_n = n+2 (n \text{ 为奇数}); \text{-----4 分}$$

$$\therefore a_{2n} = a_2 + 2(n-1) = 2n+2 \Rightarrow a_n = n+2 (n \text{ 为偶数}), \text{-----6 分}$$

综上 $a_n = n+2, n \in \mathbb{N}^*$.-----8 分

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } b_n = \begin{cases} 1, & n=1 \\ \log_{(n+1)}(n+2), & n \geq 2, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

所以 $b_1 b_2 b_3 \cdots b_k$

$$= \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdots \log_{(k+1)}(k+2)$$

$$= \log_2(k+2) \text{-----10 分}$$

$$\text{所以 } \log_2(k+2) = 2$$

$$\text{解得 } k = 2. \text{-----12 分}$$

22.解: (1) 由 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$,

$$\text{得 } f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 + b - \frac{a^2}{3}.$$

$$\text{当 } x = -\frac{a}{3} \text{ 时, } f'(x) \text{ 有极小值 } b - \frac{a^2}{3}. \text{-----2 分}$$

因为 $f'(x)$ 的极值点是 $f(x)$ 的零点.

$$\text{所以 } f\left(-\frac{a}{3}\right) = -\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + 1 = 0,$$

$$\text{又 } a > 0, \text{ 故 } b = \frac{2a^2}{9} + \frac{3}{a}. \text{-----3 分}$$

因为 $f(x)$ 有极值, 故 $f'(x)=0$ 有实根.

$$\text{从而 } b - \frac{a^2}{3} = \frac{1}{9a}(27 - a^3) \leq 0, \text{ 即 } a \geq 3. \text{-----4 分}$$

当 $a = 3$ 时, $f'(x) > 0 (x \neq -1)$, 故 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是增函数, $f(x)$ 没有极值;

$$\text{当 } a > 3 \text{ 时, } f'(x)=0 \text{ 有两个相异的实根 } x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 3b}}{3}, x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 3b}}{3}.$$

列表如下:

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$
--------	------------	-----	------------	-----	------------

故 $f(x)$ 的极值点是 x_1, x_2 . 从而 $a > 3$.

因此 $b = \frac{2a^2}{9} + \frac{3}{a}$, 定义域为 $(3, +\infty)$. -----6 分

(2) 由 (1) 知 $b = \frac{2a^2}{9} + \frac{3}{a}$

所以 $\frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{2a\sqrt{a}}{9} + \frac{3}{a\sqrt{a}}$ -----8 分

设 $g(t) = \frac{2t}{9} + \frac{3}{t}$, -----9 分

则 $g'(t) = \frac{2}{9} - \frac{3}{t^2} = \frac{2t^2 - 27}{9t^2}$.

当 $t \in (\frac{3\sqrt{6}}{2}, +\infty)$ 时, $g'(t) > 0$,

从而 $g(t)$ 在 $(\frac{3\sqrt{6}}{2}, +\infty)$ 上单调递增. -----11 分

因为 $a > 3$,

所以 $a\sqrt{a} > 3\sqrt{3}$,

故 $g(a\sqrt{a}) > g(3\sqrt{3}) = \sqrt{3}$, 即 $\frac{b}{\sqrt{a}} > \sqrt{3}$.

因此 $b^2 > 3a$. -----12 分

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。



微信搜一搜

Q 齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索