

参考答案及解析

文科数学(二)

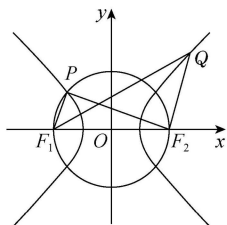
一、选择题

1. C 【解析】由题意得 $A = \{x \mid -|x| + 2 \geq 0\} = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $B = \{y \mid y = (x-1)^2 + 1\} = \{y \mid y \geq 1\}$, 所以 $A \cap B = [1, 2]$.
2. A 【解析】由题意得 $\bar{z} = \frac{9+3i}{1+2i} = \frac{(9+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{9-18i+3i+6}{5} = 3-3i$, 则 $z = 3+3i$, 所以 z 在复平面内对应的点为 $(3, 3)$, 位于第一象限.
3. C 【解析】由题可知 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$.
4. D 【解析】由题意得 $\sin(\alpha+15^\circ)\cos(\alpha-15^\circ) = 7\cos(\alpha+15^\circ)\sin(\alpha-15^\circ)$. 令 $A = \sin(\alpha+15^\circ)\cos(\alpha-15^\circ)$, $B = \cos(\alpha+15^\circ)\sin(\alpha-15^\circ)$, 则 $A = 7B$ ①. 又 $A - B = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ②, 所以联立①②, 解得 $A = \frac{7}{12}$, $B = \frac{1}{12}$, 故 $\sin(\alpha-15^\circ)\cos(\alpha+15^\circ) = \frac{1}{12}$.
5. A 【解析】由题意得 $a_{n+1} - a_n = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, 则当 $n \geq 2$ 时, $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_1 = 2\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + 2\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \dots + 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) - 1 = 1 - \frac{2}{n}$, 当 $n=1$ 时也满足上式, 所以 $a_n = 1 - \frac{2}{n} (n \in \mathbf{N}^*)$, 所以 $b_1 = \langle -1 \rangle = -1$, $b_2 = \langle 0 \rangle = 0$, $b_3 = \langle 1 - \frac{2}{3} \rangle = 1$, $b_4 = \langle 1 - \frac{2}{4} \rangle = 1$, $b_5 = b_6 = \dots = 1$, 故 $\{b_n\}$ 的前 2 023 项和为 $-1 + 0 + 1 + 1 + \dots + 1 = 2\ 020$.
6. C 【解析】第一次循环: $a = 0 + 1 = 1$, $S = 0 + 1 = 1$, 不满足输出条件, $i = 2$; 第二次循环: $a = 1 + 2 = 3$, $S = 1 + 3 = 4$, 不满足输出条件, $i = 3$; 第三次循环: $a = 3 + 3 = 6$, $S = 4 + 6 = 10$, 不满足输出条件, $i = 4$; 第四次循环: $a = 6 + 4 = 10$, $S = 10 + 10 = 20$, 不满足输出条件, $i = 5$; 第五次循环: $a = 10 + 5 = 15$, $S = 20 + 15 = 35$, 不满足输出条件, $i = 6$; 第六次循环: $a = 15 + 6 = 21$, $S = 35 + 21 = 56$, 满足输出条件, 退出循环. 所以判断框中的条件可填入 " $i < 6$ ".
7. A 【解析】设经过 n 层 PP 棉滤芯过滤后的大颗粒杂质含量为 y , 则 $y = 80 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^n = 80 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$, 令 $80 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 2$, 解得 $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{1}{40}$, 两边取常用对数得 $n \lg \frac{2}{3} \leq \lg \frac{1}{40}$, 即 $n(\lg 3 - \lg 2) \geq 1 + 2 \lg 2$, 因为 $\lg 2 \approx 0.30$, $\lg 3 \approx 0.48$, 所以 $(0.48 - 0.30)n \geq 1.60$, 解得 $n \geq \frac{80}{9}$, 因为 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 n 的最小值为 9.
8. D 【解析】设正方体的棱长为 a , 则正方体的体积 $V_1 = a^3$, 因为放置一个最大的圆锥, 所以圆锥的底面圆为正方体的底面的内切圆, 圆锥的高为正方体的棱长, 所以圆锥的体积为 $V_2 = \frac{1}{3} \times \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \times a \approx \frac{a^3}{4}$, 所以 $V_1 : V_2 \approx 4$.
9. B 【解析】因为 $a = \log_4 8 = \frac{3}{2}$, $b = \frac{e^2}{4} > \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, 所以 $b > a$. 令函数 $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$, 所以 $f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $\frac{e^{2\ 023}}{2\ 023^2} > \frac{e^2}{4}$, 即 $c > b$, 所以 $c > b > a$.
10. B 【解析】因为 $f\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = -f\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$, 所以函数图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 成中心对称, 又 $f\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称, 且 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调, 所以 $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{T}{4}$, 即 $T = \frac{2\pi}{3}$, $\omega = 3$. 又 $3 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z}, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = 0$, 所以 $f(x) = \sin 3x$, 所以 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
11. A 【解析】如图, 连接 PF_2, QF_1 , 由题意知 $|F_1F_2| = 2c, c = \sqrt{a^2 + b^2}$, 设 $\angle PF_1F_2 = \varphi$, $|PF_1| = m$, 由双曲线的定义可得 $|PF_2| = 2a + m$. 又由题可得 $PF_1 \perp PF_2$, 所以 $m^2 + (2a + m)^2 = 4c^2$, 即 $m^2 = 2b^2 - 2am$. 在 $\text{Rt}\triangle F_1PF_2$ 中, $\cos \angle PF_1F_2 = \cos \varphi = \frac{m}{2c}$, 由 $\overrightarrow{F_1P} = \frac{2}{3}\overrightarrow{F_2Q}$, 得 $|F_2Q| = \frac{3m}{2}$, 由双曲线的定义可得 $|F_1Q| =$

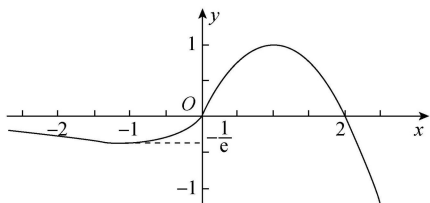
高考押题卷

· 全国卷 ·

$2a + \frac{3m}{2}$. 因为 $\overrightarrow{F_1P} = \frac{2}{3}\overrightarrow{F_2Q}$, 所以 $F_1P \parallel F_2Q$, 所以 $\angle QF_2F_1 = \pi - \varphi$, 在 $\triangle F_1F_2Q$ 中, $\cos \angle QF_2F_1 = -\cos \varphi = -\frac{m}{2c}$, 又由余弦定理可得 $|QF_1|^2 = |QF_2|^2 + |F_1F_2|^2 - 2|QF_2| \cdot |F_1F_2| \cdot \cos \angle QF_2F_1$, 即 $(2a + \frac{3m}{2})^2 = (\frac{3m}{2})^2 + (2c)^2 - 2 \cdot \frac{3m}{2} \cdot 2c \cdot (-\frac{m}{2c})$, 所以 $6am = 4b^2 + 3m^2$. 又因为 $m^2 = 2b^2 - 2am$, 所以 $b = \sqrt{3}m, a = \frac{5}{2}m$, 所以 $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{37}{4}m^2$, 故 $c = \frac{\sqrt{37}}{2}m$, 所以双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{37}}{2}m}{\frac{5}{2}m} = \frac{\sqrt{37}}{5}$.



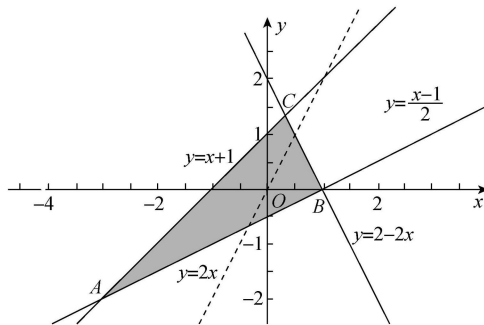
12. B 【解析】由 $f^2(x) - (2+t)f(x) + 2t = 0$ 得 $[f(x)-2][f(x)-t] = 0$, 所以 $f(x) = 2$ 或 $f(x) = t$, 因为当 $x < 0$ 时, $f(x) = xe^x$, 所以 $f'(x) = (1+x)e^x$, 所以当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 所以 $f(x) \geq f(-1) = -\frac{1}{e}$, 且 $f(x) < 0$. 又因为当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$, 所以 $f(x)$ 在 $x \in (0, 1)$ 时单调递增, 在 $x \in (1, +\infty)$ 时单调递减, 且 $f(x) \leq f(1) = 1$, 所以作出函数 $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x < 0, \\ -x^2 + 2x, & x \geq 0 \end{cases}$ 的大致图象如图.



则 $f(x) = 2$ 无解, 所以只有方程 $f(x) = t$ 有 3 个不同的实数根, 数形结合可知 $-\frac{1}{e} < t < 0$.

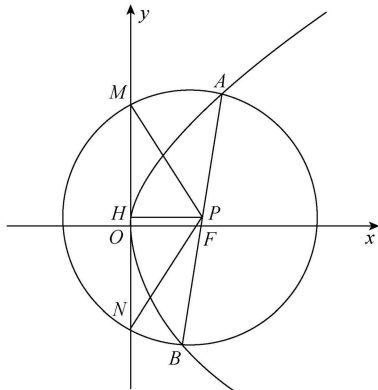
二、填空题

13. $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ 【解析】连接 OM, CN, OC , 则 $OM \perp AB, CN \perp DE$. 过点 C 作 $CF \perp OM$, 垂足为点 F , 则四边形 $CNMF$ 为矩形, 所以 $|CF| = |MN|, |CN| = |MF|$. 又 $|OM| = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}, |CN| = \frac{|2-3+4|}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, 所以 $|OF| = |OM| - |MF| = |OM| - |CN| = \frac{\sqrt{5}}{5}$. 又 $|OC| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, 所以 $|MN| = |CF| = \sqrt{|OC|^2 - |OF|^2} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - (\frac{\sqrt{5}}{5})^2} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$.
14. -4 【解析】作出不等式组表示的平面区域如图中阴影部分所示, 作直线 $l_0: y = 2x$, 平移直线 l_0 , 当直线经过点 A 时, z 最小. 由 $\begin{cases} x-y+1=0, \\ x-2y-1=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=-3, \\ y=-2, \end{cases}$ 所以 $A(-3, -2)$, 所以 $z = 2 \times (-3) - (-2) = -4$, 所以 z 的最小值为 -4.



15. $\frac{1}{3}$ 【解析】因为 $(a-2b) \cdot (3a+5b) = 3a^2 - a \cdot b - 10b^2 = -7 - a \cdot b = -\frac{22}{3}$, 所以 $a \cdot b = \frac{1}{3}$. 又 a, b 是单位向量, 所以 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{1}{3}$.
16. 最大 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】如图, 由 $y^2 = 4x$, 可知 $F(1, 0)$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(x_0, y_0)$, 易知 $x_0 \geq 1$, 所以 $|AB| = x_1 + x_2 + 2$, 过点 P 作 $PH \perp MN$ 于点 H . 设 $\angle PMH = \theta$, 则 $\sin \theta = \frac{y_0}{x_1 + x_2 + 2} = \frac{y_0}{x_0 + 1} = 1 - \frac{1}{x_0 + 1}$. 所以当 x_0 取最小值时, $\sin \theta$ 最小, 因为 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以当 $\sin \theta$ 最小时, θ 最小, $\angle MPN$ 最大, 又 x_0 的最小值为 1, 所以 $\sin \theta = \frac{1}{2}$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$, 所

以 $\angle MPN = \pi - 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\sin \angle MPN = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



三、解答题

17. 解: (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,
由 $a_3 = 5$, 得 $a_1 + 2d = 5$. (1分)

因为 $S_6 = (a_2 + 1)S_3$,
所以 $6a_1 + 15d = (a_1 + d + 1)(3a_1 + 3d)$,
整理得 $2(a_1 + 2d) + d = (a_1 + 2d + 1 - d)(a_1 + 2d - d)$, (3分)

所以 $10 + d = (6 - d)(5 - d)$, 即 $d^2 - 12d + 20 = 0$,
解得 $d = 2$ 或 $d = 10$.

当 $d = 2$ 时, $a_1 = 1$, 所以 $a_2 = a_1 + d = 3 > 0$, 符合题意;

当 $d = 10$ 时, $a_1 = -15$, 所以 $a_2 = a_1 + d = -5 < 0$, 不符合题意, 舍去, (4分)

所以 $a_n = 2n - 1$. (5分)

(2) 由 (1) 知 $S_n = \frac{(2n-1+1)n}{2} = n^2$, 则 $\frac{n+S_n}{3^n} = \frac{n^2+n}{3^n}$, (6分)

所以 $T_n = \frac{1^2+1}{3} + \frac{2^2+2}{3^2} + \frac{3^2+3}{3^3} + \dots + \frac{n^2+n}{3^n}$,

则 $\frac{1}{3}T_n = \frac{1^2+1}{3^2} + \frac{2^2+2}{3^3} + \frac{3^2+3}{3^4} + \dots + \frac{n^2+n}{3^{n+1}}$, (7分)

两式相减, 得 $\frac{2}{3}T_n = 2 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{n}{3^n} \right) - \frac{n^2+n}{3^{n+1}}$.

令 $P_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{n}{3^n}$,

则 $\frac{1}{3}P_n = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \frac{4}{3^5} + \dots + \frac{n}{3^{n+1}}$, (9分)

两式相减, 得 $\frac{2}{3}P_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^n} -$

$$\frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^{n+1}} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{2n+3}{2 \times 3^{n+1}},$$

$$\text{所以 } P_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \times 3^n},$$

$$\text{所以 } \frac{2}{3}T_n = 2 \times \left(\frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \times 3^n} \right) - \frac{n^2+n}{3^{n+1}},$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{9}{4} - \frac{2n+3}{4 \times 3^{n-1}} - \frac{n^2+n}{2 \times 3^n} = \frac{9}{4} - \frac{2n^2+8n+9}{4 \times 3^n}. \quad (12分)$$

18. (1) 证明: 由题知 $AP = AB = 2, PB = 2\sqrt{2}$,
所以 $AP^2 + AB^2 = PB^2$, 所以 $AP \perp AB$. (1分)

又因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 且交线为 AB ,
所以 $AP \perp$ 平面 $ABCD$,

又 $CD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $AP \perp CD$, (3分)

连接 AC , 因为四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形,
 $\angle ABC = 60^\circ$, 所以 $\triangle ACD$ 为等边三角形.

又因为 E 为 CD 的中点, 所以 $CD \perp AE$,

又 $AP \cap AE = A, AP \subset$ 平面 $PAE, AE \subset$ 平面 PAE ,
所以 $CD \perp$ 平面 PAE . (5分)

(2) 解: 设点 A 到平面 PEF 的距离为 h , 连接 AF ,

则 $V_{\text{三棱锥}A-PEF} = V_{\text{三棱锥}E-PAF}$, (6分)

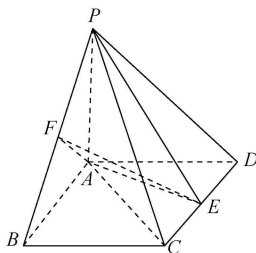
因为 $AB \parallel CD$, 所以 $AE \perp AB$, 又由 (1) 知 $AE \perp AP$,
所以 $AE \perp$ 平面 $PAB, AE \perp PF, AE \perp AF$,

易求得 $AF = \sqrt{2}, AE = \sqrt{3}$, (8分)

又由 $PF \perp AE, PF \perp AF$, 知 $PF \perp$ 平面 AEF , 且
 $PF = \sqrt{2}, FE = \sqrt{5}$, (10分)

所以 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} PF \times FE \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times PF \times AF \times AE$,

$$\text{即 } h = \frac{AF \times AE}{FE} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}. \quad (12分)$$



19. 解: (1) 由直方图可知 $(0.008 + 0.016 + 0.02 + a + 0.044 + 0.04 + 0.028 + 0.008) \times 5 = 1$,

解得 $a = 0.036$. (2分)

因为 $(0.008 + 0.016 + 0.02 + 0.036) \times 5 = 0.4 < 0.5$,

$(0.008 + 0.016 + 0.02 + 0.036 + 0.044) \times 5 = 0.62 > 0.5$, (3分)

高考押题卷

·全国卷·

所以学员该项技术的评价指标的中位数在 $[80, 85)$ 内. 设学员该项技术的评价指标的中位数为 m , 则 $(m-80) \times 0.044 + 0.4 = 0.5$,

解得 $m \approx 82.3$. (4分)

(2) 评价指标的平均数为 $(62.5 \times 0.008 + 67.5 \times 0.016 + 72.5 \times 0.02 + 77.5 \times 0.036 + 82.5 \times 0.044 + 87.5 \times 0.04 + 92.5 \times 0.028 + 97.5 \times 0.008) \times 5 = 81.6$, (6分)

所以平均数与中位数之差的绝对值为 $|81.6 - 82.3| = 0.7 < 1$, 所以有显著稳定性. (7分)

(3) 由(1)可知评价指标不低于80的频率为 $(0.044 + 0.04 + 0.028 + 0.008) \times 5 = 0.6$,

所以评价指标不低于80的样本数为 $100 \times 0.6 = 60$. (9分)

由已知可得 2×2 列联表如下:

队伍	优秀	良好	总计
A队	40	10	50
B队	20	30	50
总计	60	40	100

(10分)

$$K^2 = \frac{100 \times (40 \times 30 - 20 \times 10)^2}{50 \times 50 \times 60 \times 40} = \frac{50}{3} > 6.635, \quad (11分)$$

所以有99%的把握认为“评价指标是否优秀与训练时间有关”. (12分)

20. 解: (1) 由题意得 $2a = 2 \times 2b$, 即 $a = 2b$ ①. (2分)

当点P为C的上顶点或下顶点时, $\triangle ABP$ 的面积取得最大值, 所以 $\frac{1}{2} \times 2b \times a = 8$, 即 $ab = 8$ ②.

联立①②, 得 $a = 4, b = 2$.

故C的方程为 $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$. (4分)

(2) $\triangle ABD$ 与 $\triangle AQE$ 的面积之比为定值.

由(1)可得 $A(-2, 0), B(2, 0)$, 由题意设直线 $l: x = my + 1, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

$$\text{联立} \begin{cases} x = my + 1, \\ \frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1, \end{cases} \text{得} (4m^2 + 1)y^2 + 8my - 12 = 0,$$

则 $\Delta = 64m^2 + 48(4m^2 + 1) > 0$,

$$y_1 + y_2 = -\frac{8m}{4m^2 + 1}, y_1 y_2 = -\frac{12}{4m^2 + 1}, \quad (6分)$$

$$\text{所以 } my_1 y_2 = \frac{3}{2}(y_1 + y_2). \quad (8分)$$

直线AM的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$, 令 $x = 4$, 得 $y =$

$$\frac{6y_1}{x_1 + 2}, \text{即 } D\left(4, \frac{6y_1}{x_1 + 2}\right).$$

$$\text{同理可得 } E\left(4, \frac{2y_2}{x_2 - 2}\right). \quad (9分)$$

故 $\triangle ABD$ 与 $\triangle AQE$ 的面积之比为

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle AQE}} = \frac{\frac{1}{2}|AB||y_D|}{\frac{1}{2}|AQ||y_E|} = \frac{4|y_D|}{3|y_E|} = \left| \frac{4y_1(x_2 - 2)}{y_2(x_1 + 2)} \right| =$$

$$\left| \frac{4y_1(my_2 - 1)}{y_2(my_1 + 3)} \right| = 4 \times \left| \frac{my_1 y_2 - y_1}{my_1 y_2 + 3y_2} \right| = 4 \times$$

$$\left| \frac{\frac{3}{2}(y_1 + y_2) - y_1}{\frac{3}{2}(y_1 + y_2) + 3y_2} \right| = 4 \times \left| \frac{\frac{1}{2}y_1 + \frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1 + \frac{9}{2}y_2} \right| = \frac{4}{3},$$

即 $\triangle ABD$ 与 $\triangle AQE$ 的面积之比为定值 $\frac{4}{3}$. (12分)

21. (1) 解: 由 $f(x) = (a-1)x + \ln x$, 得 $f'(x) = a-1 +$

$$\frac{1}{x} = \frac{(a-1)x + 1}{x}, \quad (1分)$$

当 $a \geq 1$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增. (2分)

$$\text{当 } a < 1 \text{ 时, } f'(x) = \frac{(a-1)\left(x - \frac{1}{1-a}\right)}{x},$$

所以当 $x \in \left(0, \frac{1}{1-a}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in \left(\frac{1}{1-a}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减. (3分)

综上, 当 $a \geq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调

递增; 当 $a < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{1-a}\right)$ 上单调

递增, 在区间 $\left(\frac{1}{1-a}, +\infty\right)$ 上单调递减. (4分)

(2) 证明: 由 $\varphi(x) = g(x) - f(x)$ 得 $\varphi(x) = \frac{1}{2}ax^2 -$

$$(a-1)x - \ln x,$$

$$\text{所以 } \varphi'(x) = ax - (a-1) - \frac{1}{x} = \frac{ax^2 - (a-1)x - 1}{x} = \frac{(ax+1)(x-1)}{x}, \quad (5分)$$

因为 $a > 2$, 所以 $\frac{ax+1}{x} > 0$,

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 单调递增,

所以当 $x = 1$ 时, $\varphi(x)_{\min} = \varphi(1) = -\frac{1}{2}a + 1$, (7分)

因为 $a > 2$, 所以 $\varphi(1) < 0$, 下面证明 $\varphi(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上与 $(1, +\infty)$ 上分别存在一个零点,

因为 $\varphi(2) = 2a - 2(a-1) - \ln 2 = 2 - \ln 2 > 0$,

· 文科数学 ·

参考答案及解析

所以在区间 $(1, +\infty)$ 上存在唯一零点 x_1 , 且 $\varphi(x_1)=0$.
(9分)

因为 $\varphi(x)=\frac{1}{2}a(x^2-2x)+x-\ln x$,
当 $x \in (0, 1)$ 时, $-1 < x^2-2x < 0$,
所以 $\varphi(x) > -\frac{1}{2}a+x-\ln x$,
所以 $\varphi\left(e^{-\frac{1}{2}a}\right) > -\frac{1}{2}a + e^{-\frac{1}{2}a} - \ln\left(e^{-\frac{1}{2}a}\right) = e^{-\frac{1}{2}a} > 0$,
所以 $\varphi(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上存在唯一零点 x_2 , 且 $\varphi(x_2)=0$, (11分)
所以当 $a > 2$ 时, 函数 $\varphi(x)=g(x)-f(x)$ 有两个不同的零点. (12分)

22. 解: (1) 由 $\begin{cases} x=2-t, \\ y=3+t \end{cases}$ (t 为参数)消去参数 t ,
得 $y=5-x$,
所以直线 l 的普通方程为 $x+y-5=0$. (3分)
由 $\rho^2+4\rho\sin\theta+12-a=0$ 得 $x^2+y^2+4y+12-a=0$, 即 $x^2+(y+2)^2=a-8$,
所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+(y+2)^2=a-8$. (5分)

(2) 由(1)知曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+(y+2)^2=a-8$,
因为 $a > 8$, 所以曲线 C 表示圆心为 $(0, -2)$, 半径为 $\sqrt{a-8}$ 的圆.
要使直线 l 与曲线 C 有公共点, 必须满足:

圆心到直线 l 的距离 $d=\frac{|0-2-5|}{\sqrt{1+1}} \leq \sqrt{a-8}$, (7分)
解得 $a \geq \frac{65}{2}$, 即实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{65}{2}, +\infty\right)$. (10分)

23. 解: (1) 因为 $f(x)=2|x+2|-|x-5| = \begin{cases} -x-9, & x \leq -2, \\ 3x-1, & -2 < x < 5, \\ x+9, & x \geq 5, \end{cases}$ (2分)

所以 $f(x) \geq 4$ 等价于 $\begin{cases} x \leq -2, \\ -x-9 \geq 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -2 < x < 5, \\ 3x-1 \geq 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \geq 5, \\ x+9 \geq 4 \end{cases}$,
解得 $x \leq -13$ 或 $\frac{5}{3} \leq x < 5$ 或 $x \geq 5$,
所以 $x \leq -13$ 或 $x \geq \frac{5}{3}$, (4分)

所以不等式 $f(x) \geq 4$ 的解集为 $(-\infty, -13] \cup \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$. (5分)

(2) 由(1)可知当 $x=-2$ 时, $f(x)$ 有最小值, 且为 $f(-2)=-7$, (7分)
所以 $f(x) \geq a^2+2a-10$ 恒成立等价于 $-7 \geq a^2+2a-10$ 恒成立,
所以 $a^2+2a-3 \leq 0$, 解得 $-3 \leq a \leq 1$,
即实数 a 的取值范围为 $[-3, 1]$. (10分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

