

2022 学年第二学期 9+1 高中联盟期中考试

高二年级数学学科 试题

命题: 富阳中学 何文明 洪步高 审题: 义乌中学 杨其松 新昌中学 董益芳

考生须知:

1. 本卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟;
2. 答题前, 在答题卷指定区域填写班级、姓名、考场、座位号及准考证号并核对条形码信息;
3. 所有答案必须写在答题卷上, 写在试卷上无效, 考试结束后, 只需上交答题卷;

一、选择题 (本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 已知  $A_{10}^n = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$ , 则  $n$  的值为 ( ▲ )  
A. 3                      B. 4                      C. 5                      D. 6
2. 已知等比数列  $\{a_n\}$  首项为  $-1$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{31}{32}$ , 则公比  $q$  为 ( ▲ )  
A. 1                      B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $-1$                       D.  $-\frac{1}{2}$
3. 设随机变量  $\xi \sim N(3, 4)$ , 若  $P(\xi < 2a - 3) = P(\xi > a + 2)$ , 则  $a$  的值为 ( ▲ )  
A.  $\frac{7}{3}$                       B.  $\frac{4}{3}$                       C. 3                      D. 5
4. 已知函数  $f(x) = x(x - c)^2$  在  $x = 2$  处有极大值, 则实数  $c$  的值为 ( ▲ )  
A. 2                      B. 6                      C. 2 或 6                      D. 8
5. 随机变量  $X$  的分布列为  $P(X = n) = \frac{a}{n(n+2)}$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ), 其中  $a$  是常数, 则  $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{5}{2}\right) =$  ( ▲ )  
A.  $\frac{55}{68}$                       B.  $\frac{55}{136}$                       C.  $\frac{4}{5}$                       D.  $\frac{5}{6}$
6. “中国剩余定理”又称“孙子定理”, 最早可见于中国南北朝时期的数学著作《孙子算经》卷下第二十六题, 叫做“物不知数”, 原文如下: 今有物不知其数, 三三数之剩二, 五五数之剩三, 七七数之剩二, 问物几何? 现有这样一个相关的问题: 被 3 除余 2 且被 5 除余 3 的正整数按照从小到大的顺序排成一列, 构成数列  $\{a_n\}$ , 记数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 则  $\frac{2S_n + 80}{n}$  的最小值为 ( ▲ )  
A.  $20\sqrt{3} + 1$                       B.  $40\sqrt{3} + 1$                       C. 71                      D.  $\frac{218}{3}$
7. 若任意两个不等正实数  $x_1, x_2 \in (m, +\infty)$ , 满足  $\frac{x_1 \ln x_2 - x_2 \ln x_1}{x_2 - x_1} < 2$ , 则  $m$  的最小值为 ( ▲ )  
A.  $\frac{1}{e^2}$                       B. 1                      C.  $e$                       D.  $\frac{1}{e}$
8. 某校以劳动周的形式开展劳育工作的创新实践. 学生可以参加“民俗文化”“茶艺文化”“茶壶制作”“水果栽培”“蔬菜种植”“3D 打印”这六门劳动课中的两门. 则甲、乙、丙这 3 名学生至少有 2 名学生所选劳动课全不相同的方法种数共有 ( ▲ )  
A. 2080                      B. 2520                      C. 3375                      D. 3870



二、选择题(本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分)

9. 用0到6这7个数字,可以组成没有重复数字的三位数的个数为(▲)
- A.  $A_6^3 + 2A_6^2$       B.  $A_6^1 A_6^2$       C.  $A_7^3 - A_6^2$       D.  $A_6^3 + A_6^2$
10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1$ ,前 $n$ 项和为 $S_n$ ,下列说法正确的有(▲)
- A. 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,公差 $d > 0$ ,则数列 $\{a_n\}$ 单调递增  
 B. 若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列,公比 $q > 1$ ,则数列 $\{a_n\}$ 单调递增  
 C. 若 $S_n = 3 - 2^n (n \in N_+)$ ,则数列 $\{a_n\}$ 为公比为2的等比数列  
 D. 若 $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} (n \in N_+)$ ,则数列 $\{a_n\}$ 为等差数列

11. 声音是由物体振动产生的声波,其中包含着正弦函数.纯音的数学模型是函数 $y = A \sin \omega t$ ,我们听到的声音是由纯音合成的,称之为复合音.若一个复合音的数学模型是函数 $f(x) = \sin \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \sin x$ ,则当 $x \in [0, 2\pi]$ 时,函数 $f(x)$ 一定有(▲)

- A. 三个不同零点      B. 在 $[0, \pi]$ 上单调递增  
 C. 极大值,且极大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$       D. 一条切线为 $y = x$
12. 已知红箱内有5个红球、3个白球,白箱内有3个红球、5个白球,所有小球大小、形状完全相同.第一次从红箱内取出一球后再放回原袋,第二次从与第一次取出的球颜色相同的箱子内取出一球,然后放回原袋,依次类推,第 $k+1$ 次从与第 $k$ 次取出的球颜色相同的箱子内取出一球,然后放回去.记第 $n$ 次取出的球是红球的概率为 $P_n$ ,数列 $\{P_n\}$ 前 $n$ 项和记为 $S_n$ ,则下列说法正确的是(▲)
- A.  $P_2 = \frac{17}{32}$       B.  $4P_{n+2} + P_n = 5P_{n+1}$   
 C. 当 $n$ 无限增大, $P_n$ 将趋近于 $\frac{3}{5}$       D.  $S_n = \frac{1}{6} \left[ 3n + 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right]$

三、填空题(本小题共4小题,每小题5分,共20分)

13.  $(x^3 + \frac{a}{x})^6$ 展开式中 $x^6$ 的系数为-160,则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 杨辉三角由我国南宋数学家杨辉在其所著的《详解九章算术》中提出,是二项式系数在三角形中的一种几何排列,图形如图.



第14题图

记从上往下每一行各数之和为数列 $\{a_n\}$ ,比如 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4$ ,则数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项之和为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

15. 某工厂去年12月试产1050个高新电子产品,产品合格率为90%.从今年1月开始,工厂在接下来的两年中将生产这款产品.1月按去年12月的产量和产品合格率生产,以后每月的产量都在前一个月的基础上提高5%,产品合格率比前一个月增加0.4%.设从今年1月起(作为第一个月),第  $\underline{\hspace{2cm}}$  个月,月不合格品数量首次控制在100个以内.(参考数据:  $1.05^{10} \approx 1.6, 1.05^{11} \approx 1.7, 1.05^{12} \approx 1.8, 1.05^{13} \approx 1.9$ )

16. 已知函数  $f(x) = a \ln x - 2x (a \neq 0)$ , 若不等式  $x^a \geq 2e^{2x} f(x) + e^{2x} \cos(f(x))$  对  $x > 0$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围为         .

四、解答题 (本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10 分) 设正项数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $2S_n = a_n^2 + a_n$ .

(I) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 记  $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 求证:  $T_n < 2$ .

18. (12 分) 设函数  $f(x) = a^2 x - 2a\sqrt{x} - 2 \ln x + 1 (a \neq 0)$ .

(I) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(II) 若  $y = f(x)$  的图象与  $x$  轴没有公共点, 求  $a$  的取值范围.

19. (12 分) 某学校有 A, B 两家餐厅, 王同学第 1 天午餐时随机的选择一家餐厅用餐. 如果第一天去 A 餐厅, 那么第 2 天去 A 餐厅的概率为 0.6, 如果第 1 天去 B 餐厅, 那么第 2 天去 A 餐厅的概率为 0.8.

(I) 计算王同学第 2 天去 A 餐厅用餐的概率;

(II) 王同学某次在 A 餐厅就餐, 该餐厅提供 5 种西式点心,  $n$  种中式点心, 王同学从这些点心中选择三种点心, 记选择西式点心的种数为  $X$ , 求  $n$  的值使得  $P(X=1)$  最大.

20. (12 分) 函数  $f(x) = \lg \frac{20-10x}{1+x}$ , 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n = f\left(\frac{1}{2n}\right) + f\left(\frac{2}{2n}\right) + f\left(\frac{3}{2n}\right) \cdots + f\left(\frac{2n-1}{2n}\right)$ .

(I) 求证:  $f(x) + f(1-x)$  为定值, 并求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 记数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 数列  $\left\{\frac{S_n}{a_n a_{n+1}}\right\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 若  $T_n \leq \lambda \cdot S_n$  对  $n \in N_+$  恒成立, 求  $\lambda$  的取值范围.

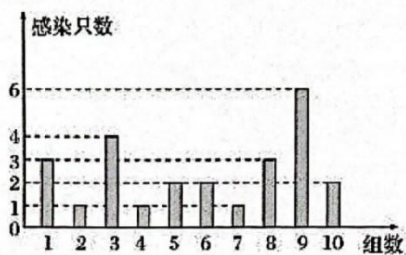


21. (12分) 某制药公司研制了一款针对某种病毒的新疫苗. 该病毒一般通过病鼠与白鼠之间的接触传染, 现有  $n$  只白鼠, 每只白鼠在接触病鼠后被感染的概率为  $\frac{1}{2}$ , 被感染的白鼠数用随机变量  $X$  表示, 假设每只白鼠是否被感染之间相互独立.

(I) 若  $P(X=5)=P(X=95)$ , 求数学期望  $E(X)$ ;

(II) 接种疫苗后的白鼠被病鼠感染的概率为  $p$ , 现有两个不同的研究团队理论研究发现概率  $p$  与参数  $\theta(0<\theta<1)$  的取值有关. 团队 A 提出函数模型为  $p = \ln(1+\theta) - \frac{2}{3}\theta^2$ , 团队 B 提出函数模型为

$p = \frac{1}{2}(1 - e^{-\theta})$ . 现将白鼠分成 10 组, 每组 10 只, 进行实验, 随机变量  $X_i(i=1, 2, \dots, 10)$  表示第  $i$  组被感染的白鼠数, 现将随机变量  $X_i(i=1, 2, \dots, 10)$  的实验结果  $x_i(i=1, 2, \dots, 10)$  绘制成频数分布图, 如图所示.



第 21 题图

(i) 试写出事件 “ $X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_{10}=x_{10}$ ” 发生的概率表达式 (用  $p$  表示, 组合数不必计算);

(ii) 在统计学中, 若参数  $\theta=\theta_0$  时使得概率  $P(X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_{10}=x_{10})$  最大, 称  $\theta_0$  是  $\theta$  的最大似然估计. 根据这一原理和团队 A, B 提出的函数模型, 判断哪个团队的函数模型可以求出  $\theta$  的最大似然估计, 并求出最大似然估计. 参考数据:  $\ln \frac{3}{2} \approx 0.4065$ .

22. (12分) 已知函数  $f(x) = (x-1)e^x - \frac{1}{3}ax^3 - ax^2, a \in R$ .

(I) 若  $x=0$  不是函数的极值点, 求  $a$  的值;

(II) 当  $a < \frac{1}{2}$ , 若  $f(x)$  有三个极值点  $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$ , 且  $x_1 + x_2 + x_3 \in [3 \ln 2 - 4, \frac{5-3e}{e-1}]$ ,

求  $\frac{x_3 + x_2 + 2}{x_3 + x_1 + 2}$  的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizs.com](http://www.zizs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**浙江官方微信号：**zjgkjzb**。



微信搜一搜

浙考家长帮

