2023 高考临考信息卷

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	C	D	A	B	D	D	B	BC	BD	BCD	AD

1.C　**解析:** $M=\{x\mid x^2-x-2<0\}=(-1,2)$,由 $1-\ln x\geqslant 0$,得 $0<x\leqslant \mathrm{e}$,则 $N=\{x\mid y=\sqrt{1-\ln x}\}=(0,\mathrm{e}]$,所以 $M\cup N=(-1,\mathrm{e}]$. 故选 C.

2.C　**解析:** 因为 $(1-2\mathrm{i})z=|3-4\mathrm{i}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$,可得 $z=\frac{5}{1-2\mathrm{i}}=\frac{5(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=1+2\mathrm{i}$,所以 $\bar{z}=1-2\mathrm{i}$. 故选 C.

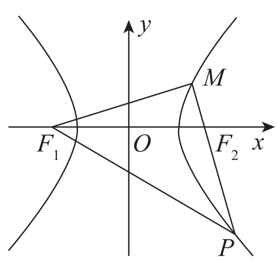
3.D　**解析:** 设随机抽取一人进行验血,其诊断结果为阳性为事件 A,设随机抽取一人为患者为事件 B,随机抽取一人为非患者为事件 $\bar{B}$,则 $P(A)=P(A\mid B)P(B)+P(A\mid \bar{B})P(\bar{B})=0.98\times 0.05+0.02\times 0.95=0.068$. 故选 D.

4.A　**解析:** 由抛物线的性质知,点 O_1 到 C 的准线 l 的距离为 $\frac{1}{2}|AB|=r$,依题意得 $r^2=25\Rightarrow r=5$,又点 O_1 到 C 的准线 l 的距离为 $\frac{1}{2}(x_1+x_2+2)=r=5$,则有 $x_1+x_2=8$,故 $r(x_1+x_2)=40$. 故选 A.

5.B　**解析:** 由题意可知,$\rho(1)=\mathrm{e}^{a+b}=6.25$,$\rho(3)=\mathrm{e}^{3a+b}=1$,$\frac{\rho(3)}{\rho(1)}=\mathrm{e}^{2a}=\frac{4}{25}$,解得 $\mathrm{e}^a=\frac{2}{5}$. 设该文化娱乐场所竣工后放置 t_0 周后甲醛浓度达到安全开放标准,则 $\rho(t_0)=\mathrm{e}^{at_0+b}=\mathrm{e}^{a+b}\cdot\mathrm{e}^{a(t_0-1)}=6.25\times\left(\frac{2}{5}\right)^{t_0-1}\leqslant 0.1$,整理得 $62.5\leqslant\left(\frac{5}{2}\right)^{t_0-1}$. 设 $62.5=\left(\frac{5}{2}\right)^{m-1}$,因为 $\left(\frac{5}{2}\right)^4<62.5<\left(\frac{5}{2}\right)^5$,所以 $4<m-1<5$,即 $5<m<6$,则 $t_0-1\geqslant m-1$,即 $t_0\geqslant m$,故竣工后至少需要放置的时间为 6 周. 故选 B.

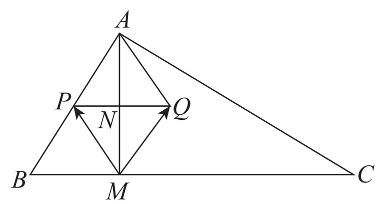
6.D　**解析:** 设圆柱和圆锥底面半径分别为 r,R,因为圆锥轴截面的顶角为直角,所以圆锥母线长为 $\sqrt{2}R$,设圆柱高为 h,则 $\frac{h}{R}=\frac{R-r}{R}$,$h=R-r$,由题意得 $\pi\times R\times\sqrt{2}R=2\pi r^2+2\pi r\times(R-r)$,解得 $\frac{r}{R}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 D.

7.D　**解析:** 设 $|MF_1|=t\,(t>2a)$,由双曲线的定义可得 $|MF_2|=t-2a$,又 $|PF_2|=|MF_1|=t$,则 $|PF_1|=t+2a$,由 $MF_1\perp MF_2$,可得 $|MF_1|^2+|MP|^2=|PF_1|^2$,即 $t^2+(2t-2a)^2=(t+2a)^2$,解得 $t=3a$. 又 $|MF_1|^2+|MF_2|^2=|F_2F_1|^2$,即 $(3a)^2+a^2=4c^2$,即 $c=\frac{\sqrt{10}}{2}a$,所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{2}$. 故选 D.



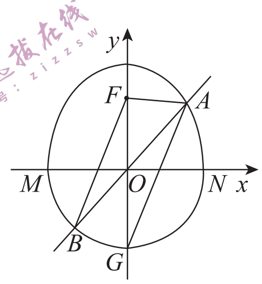
8.B　**解析:** 取 PQ 的中点 N,则 $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}$,$\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NP}$,可得 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP})\cdot(\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NP})=\overrightarrow{MN}^2-\overrightarrow{NP}^2=\overrightarrow{MN}^2-1$,$\because|\overrightarrow{MN}|=|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}|\geqslant||\overrightarrow{MA}|-|\overrightarrow{AN}||$,当

且仅当点 N 在线段 AM 上时,等号成立,故 $|\overrightarrow{MN}|\geqslant||\overrightarrow{MA}|-|\overrightarrow{AN}||=||\overrightarrow{MA}|-\sqrt{3}|$,显然当 $AM\perp BC$ 时,$|\overrightarrow{MA}|$ 取到最小值 $2\sqrt{3}$,$\therefore|\overrightarrow{MN}|\geqslant||\overrightarrow{MA}|-\sqrt{3}|\geqslant|2\sqrt{3}-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$,故 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MN}^2-1\geqslant 3-1=2$. 故选 B.



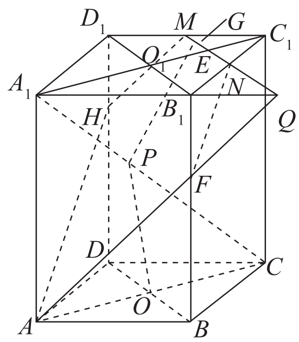
9. BC　**解析**:对于 A,由方差的性质可得 $D(\eta)=2^2D(\xi)=4D(\xi)$,故 A 错误;对于 B,由正态密度曲线的对称性可得 $P(3<\xi<6)=P(\xi<6)-0.5=0.34$,故 B 正确;对于 C,由样本相关系数知识可得,样本相关系数 r 的绝对值越接近 1,则成对样本数据的线性相关程度越强,故 C 正确;对于 D,甲组:第 30 百分位数为 30,第 50 百分位数为 $\frac{37+m}{2}$,乙组:第 30 百分位数为 n,第 50 百分位数为 $\frac{33+44}{2}=\frac{77}{2}$,则 $\begin{cases}n=30,\\ \frac{37+m}{2}=\frac{77}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}n=30,\\ m=40,\end{cases}$ 故 $m+n=70$,故 D 错误. 故选 BC.

10. BD　**解析**:由题知,椭圆中的几何量 $b=c=3$,所以 $a=\sqrt{c^2+b^2}=3\sqrt{2}$,则离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故 A 不正确;因为 $|AB|=|OB|+|OA|=3+|OA|$,由椭圆性质可知 $3\leqslant|OA|\leqslant 3\sqrt{2}$,所以 $6\leqslant|AB|\leqslant 3+3\sqrt{2}$,故 D 正确;设 A,B 到 y 轴的距离分别为 d_1,d_2,则 $S_{\triangle ABF}=S_{\triangle AOF}+S_{\triangle OBF}=\frac{1}{2}d_1\cdot|OF|+\frac{1}{2}d_2\cdot|OF|=\frac{3}{2}(d_1+d_2)$,当点 A 在短轴的端点处时,d_1,d_2 同时取得最大值 3,故 $\triangle ABF$ 面积的最大值是 9,故 C 不正确;由椭圆定义知,$|AF|+|AG|=2a=6\sqrt{2}$,所以 $\triangle AFG$ 的周长 $C_{\triangle AFG}=|FG|+6\sqrt{2}=6+6\sqrt{2}$,故 B 正确. 故选 BD.



11. BCD　**解析**:对于选项 A,因为三棱锥 A_1-BCD 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times AA_1=\frac{8\sqrt{6}}{3}$,解得 $AA_1=2\sqrt{6}$,故选项 A 错误;对于选项 B,外接球的半径满足 $4R^2=AB^2+AD^2+AA_1^2=40$,故外接球的表面积 $S=4\pi R^2=40\pi$,故选项 B 正确;对于选项 D,因为 $BD/\!/$平面 α,$BD/\!/B_1D_1$,$B_1D_1\not\subset$平面 α,所以 $B_1D_1/\!/$平面 α,又平面 $A_1B_1C_1D_1\cap$平面 $\alpha=MN$,$B_1D_1\subset$平面 $A_1B_1C_1D_1$,所以 $B_1D_1/\!/MN$,又因为四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是正方形,$A_1C_1\perp B_1D_1$,所以 $A_1C_1\perp MN$,因为侧棱 $AA_1\perp$底面 $A_1B_1C_1D_1$,$MN\subset$底面 $A_1B_1C_1D_1$,所以 $AA_1\perp MN$,又 $A_1C_1\cap AA_1=A_1$,所以 $MN\perp$平面 AA_1C_1C,垂足是 E,故对任意的 G,都有 $PG\geqslant PE$,又因为 $OO_1=2\sqrt{6}$,$O_1E=\frac{1}{4}A_1C_1=1$,故 $PO+PG\geqslant PO+PE\geqslant OE=\sqrt{OO_1^2+O_1E^2}=5$,故选项 D 正确;对于选项 C,如图,延长 MN 交 A_1B_1 的延长线于点 Q,连接 AQ 交

BB_1 于点 F，在平面 CC_1D_1D 内作 $MH /\!/ AF$ 交 DD_1 于点 H，连接 AH，则平面 α 截四棱柱所得的截面是五边形 $AFNMH$，因为 $B_1Q=B_1N=\frac{1}{2}AB$，所以此时 $\frac{B_1F}{BB_1}=\frac{1}{3}$，故 $\frac{1}{3}<\frac{B_1F}{BB_1}<1$ 时截面是六边形，$0<\frac{B_1F}{BB_1}\leqslant\frac{1}{3}$ 时截面是五边形，故选项 C 正确. 故选 BCD.



12. AD　**解析**：对于 A，$\because \frac{e^a}{a+1}=\frac{e^b}{b+1}=1.01>0$，$\therefore a>-1, b>-1$，令 $f(x)=\frac{e^x}{1+x}(x>-1)$，则 $f'(x)=\frac{xe^x}{(1+x)^2}$，所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(0)=1$，又 $f(1)>1.01$，故 $0<a<1$，$-1<b<0$. 令 $h(x)=\ln f(x)-\ln f(-x)=2x-\ln(x+1)+\ln(-x+1)$，$x\in(-1,1)$，则 $h'(x)=2-\frac{1}{x+1}+\frac{-1}{-x+1}=2-\frac{2}{1-x^2}\leqslant 0$，所以 $h(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减，且 $h(0)=0$，$\because b\in(-1,0)$，$\therefore \ln f(b)-\ln f(-b)>0$，$\therefore f(b)>f(-b)$，$\therefore f(a)>f(-b)$，$\therefore a>-b$，即 $a+b>0$，故选项 A 正确；对于B，$\because (1-c)e^c=(1-d)e^d=0.99>0$，$\therefore c<1, d<1$，令 $g(x)=(1-x)e^x(x<1)$，则 $g'(x)=-xe^x$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减，且 $g(0)=1$，又 $g(-1)<0.99$，故 $0<c<1$，$-1<d<0$. 令 $m(x)=\ln g(x)-\ln g(-x)=2x-\ln(x+1)+\ln(-x+1)=h(x)$，$x\in(-1,1)$，所以 $m(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减，且 $m(0)=0$，$\because c\in(0,1)$，$\therefore \ln g(c)-\ln g(-c)<0$，$\therefore g(c)<g(-c)$，$\therefore g(d)<g(-c)$，$\therefore d<-c$，即 $c+d<0$，故选项 B 错误；对于 C，$\because f(x)=\frac{1}{g(-x)}$，$\therefore g(-a)=\frac{1}{f(a)}=\frac{100}{101}>0.99$，$-a\in(-1,0)$，$\therefore g(-a)>g(d)$，又 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，$\therefore -a>d$，$\therefore a+d<0$，故选项 C 错误；对于 D，由 C 可知，$g(-b)>g(c)$，$-b\in(0,1)$，又 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$\therefore -b<c$，即 $b+c>0$，故选项 D 正确. 故选 AD.

13. $-\frac{3}{5}$　**解析**：因为角 α 的终边与圆 $x^2+y^2=9$ 相交于点 $\left(\frac{3\sqrt{5}}{5},t\right)$，所以 $\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}\div 3=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-1=-\frac{3}{5}$.

14. 74　**解析**：对于 $(x-2)^5$，其二项展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}(-2)^r$，令 $5-r=1$，得 $r=4$，故 $T_5=C_5^4 x(-2)^4=80x$，对于 $(x-1)^6$，其二项展开式的通项为 $T_{k+1}=C_6^k x^{6-k}(-1)^k$，令 $6-k=1$，得 $k=5$，故 $T_6=C_6^5 x(-1)^5=-6x$，所以 $a_1=80-6=74$.

15. $\frac{e^2}{4}$　**解析**：由 $g(x)=\frac{e^x}{x^2}$ 可得 $g'(x)=\frac{e^x\cdot x^2-e^x\cdot 2x}{x^4}=\frac{(x^2-2x)e^x}{x^4}$，当 $x<0$ 或 $x>2$ 时，$g'(x)>0$，当 $0<x<2$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 的极小值点是 2. 由 $f(x)=\frac{e^x}{x^2}+k(2\ln x-x)$ 可得 $f'(x)=\frac{x(x-2)e^x}{x^4}+$

$k\left(\frac{2}{x}-1\right)=(x-2)\left(\frac{e^x}{x^3}-\frac{k}{x}\right)$，$x\in(0,+\infty)$，因为 $f(x)$ 的唯一极值点为 2，所以 $\frac{e^x}{x^3}-\frac{k}{x}\geqslant 0$ 或 $\frac{e^x}{x^3}-\frac{k}{x}\leqslant 0$ 恒成立，所以 $k\leqslant\frac{e^x}{x^2}$ 或 $k\geqslant\frac{e^x}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，因为 $g(x)=\frac{e^x}{x^2}$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，所以 $k\leqslant\frac{e^x}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，则 $k\leqslant g(x)_{\min}=g(2)=\frac{e^2}{4}$.

16. $10\times3^{k-1}$　**解析**：设数列 A_k 中，0 的个数为 a_k，1 的个数为 b_k，则 $a_{k+1}=a_k+2b_k$，$b_{k+1}=2a_k+b_k$，两式相加，得 $a_{k+1}+b_{k+1}=3(a_k+b_k)$，又 $a_1+b_1=5$，∴数列 $\{a_k+b_k\}$ 是以 5 为首项，3 为公比的等比数列，∴$a_k+b_k=5\times3^{k-1}$；两式相减，得 $a_{k+1}-b_{k+1}=-(a_k-b_k)$，又 $a_1-b_1=-1$，∴数列 $\{a_k-b_k\}$ 是以 -1 为首项，-1 为公比的等比数列，∴$a_k-b_k=(-1)^k$，∴$a_k=\frac{5\times3^{k-1}+(-1)^k}{2}$，$b_k=\frac{5\times3^{k-1}-(-1)^k}{2}$，∴$S_k=0\times a_k+1\times b_k=b_k$，∴$S_k+S_{k+1}=\frac{5\times3^{k-1}-(-1)^k}{2}+\frac{5\times3^k-(-1)^{k+1}}{2}=\frac{5\times3^{k-1}+5\times3^k}{2}=10\times3^{k-1}$.

17. **解**：(1)因为 $\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{21}}{14}$，$\angle BAC$ 为锐角，所以 $\cos\angle BAC=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{21}}{14}\right)^2}=\frac{5\sqrt7}{14}$. ………… (2 分)

因为 $AC=\sqrt7$，$AB=3$，在△ABC 中，由余弦定理得 $BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos\angle BAC$，……………………………………………… (3 分)

即 $BC^2=7+9-2\times\sqrt7\times3\times\frac{5\sqrt7}{14}=1$，得 $BC=1$. ……………………………… (4 分)

(2)在△ADC 中，由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin\angle DAC}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$，即 $\frac{CD}{\frac{\sqrt{21}}{14}}=\frac{\sqrt7}{\frac{\sqrt3}{2}}$，所以 $CD=1$. …………… (6 分)

在△ADC 中，由余弦定理得 $\cos\angle ADC=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}$，即 $-\frac12=\frac{AD^2+1-7}{2AD}$，解得 $AD=2$. ……………………………………………… (8 分)

因为 $S_{\triangle ABC}=\frac12\times\sqrt7\times3\times\frac{\sqrt{21}}{14}=\frac{3\sqrt3}{4}$，$S_{\triangle ACD}=\frac12\times1\times2\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt3}{2}$，

所以 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{3\sqrt3}{4}+\frac{\sqrt3}{2}=\frac{5\sqrt3}{4}$. ……………………………… (10 分)

18. **解**：(1)∵$a_{n+1}^2=a_n(a_{n+1}+2a_n)$，∴$(a_{n+1}-2a_n)(a_{n+1}+a_n)=0$，则 $a_{n+1}-2a_n=0$ 或 $a_{n+1}+a_n=0$，

∵$a_n>0$，∴$a_{n+1}=2a_n$，……………………………………………… (2 分)

∴数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，公比为 2，$a_1=2$，∴数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n$. …………………… (4 分)

(2)证明：由(1)得 $a_n=2^n$，$a_{n+1}=2^{n+1}$，

则 $b_n=\frac{1}{\log_2a_n\cdot\sqrt{\log_2a_{n+1}}+\log_2a_{n+1}\cdot\sqrt{\log_2a_n}}=\frac{1}{\log_22^n\cdot\sqrt{\log_22^{n+1}}+\log_22^{n+1}\cdot\sqrt{\log_22^n}}$

$=\frac{1}{n\cdot\sqrt{n+1}+(n+1)\cdot\sqrt n}=\frac{1}{\sqrt n\cdot\sqrt{n+1}(\sqrt n+\sqrt{n+1})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt n}{\sqrt n\cdot\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt n}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，……… (7 分)

∴数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=\frac{1}{\sqrt1}-\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt3}+\cdots+\frac{1}{\sqrt n}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，…………… (9 分)

∴$S_n<1$，……………………………………………… (10 分)

$\because$当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n-S_{n-1}=b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}>0$，$\therefore$当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$\{S_n\}$ 为递增数列，

$\therefore S_1\leqslant S_n$，即$\frac{2-\sqrt{2}}{2}\leqslant S_n$，

$\therefore\frac{2-\sqrt{2}}{2}\leqslant S_n<1$. ……………………………………………………………………（12 分）

19. **解**：(1)当第一天训练的是“篮球运球上篮”且第三天训练的也是“篮球运球上篮”为事件 A；

当第一天训练的不是“篮球运球上篮”且第三天训练的是“篮球运球上篮”为事件 B.

由题知，3 天的训练过程中，总共的可能情况为 $3\times2\times2=12$ 种，

所以，$P(A)=\frac{1\times2\times1}{12}=\frac{1}{6}$，$P(B)=\frac{2\times1\times1}{12}=\frac{1}{6}$，

所以，第三天训练的是“篮球运球上篮”的概率 $P=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}$. ……………………………（4 分）

(2)由题知，X 的可能取值为 0,1,2,3， ……………………………………………………………（5 分）

考前最后 6 天训练中，所有可能的结果有 $3\times2^5=96$ 种，……………………………………………（6 分）

当 $X=0$ 时，第一天有两种选择，之后每天都有 1 种选择，所以，$P(X=0)=\frac{2\times1^5}{3\times2^5}=\frac{2}{96}=\frac{1}{48}$；

当 $X=1$ 时，共有 $2+4+4+4+4+2=20$ 种选择，所以，$P(X=1)=\frac{20}{96}=\frac{5}{24}$；

当 $X=3$ 时，共有 $8+4+4+8=24$ 种选择，所以，$P(X=3)=\frac{24}{96}=\frac{1}{4}$；

所以，$P(X=2)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=3)=\frac{50}{96}=\frac{25}{48}$，……………………………（10 分）

所以，X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{48}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{1}{4}$

所以，$E(X)=0\times\frac{1}{48}+1\times\frac{5}{24}+2\times\frac{25}{48}+3\times\frac{1}{4}=2$. ……………………………………（12 分）

20. **解**：(1)由题意知$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$\therefore a=2c$，又 $b^2=a^2-c^2$，则 $b=\sqrt{3}c$，……………………………………（1 分）

设$\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径为 r，则 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|)\cdot r=\frac{1}{2}(2a+2c)\cdot r=(a+c)\cdot r$.

故当$\triangle PF_1F_2$ 面积最大时，r 最大，即点 P 位于椭圆短轴顶点时 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$， ……………………………（3 分）

所以$\frac{\sqrt{3}}{3}(a+c)=bc$，把 $a=2c$，$b=\sqrt{3}c$ 代入，解得 $a=2$，$b=\sqrt{3}$，$c=1$，

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………………（5 分）

(2)由题意知，直线 AB 的斜率存在且不为 0，设直线 AB 的方程为 $x=ty+4$，

代入椭圆方程得$(3t^2+4)y^2+24ty+36=0$，$\Delta=(24t)^2-144(3t^2+4)=144(t^2-4)>0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\frac{-24t}{3t^2+4}$，$y_1y_2=\frac{36}{3t^2+4}$， ……………………………（7 分）

因此可得 $x_1+x_2=\dfrac{32}{3t^2+4}$，所以 AB 中点的坐标为 $\left(\dfrac{16}{3t^2+4},\dfrac{-12t}{3t^2+4}\right)$，…………………………………………（8 分）

因为 G 是 $\triangle ABQ$ 的外心，所以 G 是线段 AB 的垂直平分线与线段 BQ 的垂直平分线的交点，

由题意可知 B,Q 关于 x 轴对称，故 $Q(x_2,-y_2)$，

AB 的垂直平分线方程为 $-t\left(x-\dfrac{16}{3t^2+4}\right)=y+\dfrac{12t}{3t^2+4}$，……………………………………………………（9 分）

令 $y=0$，得 $x=\dfrac{4}{3t^2+4}$，即 $G\left(\dfrac{4}{3t^2+4},0\right)$，所以 $|GF_2|=\left|\dfrac{4}{3t^2+4}-1\right|=\dfrac{3t^2}{3t^2+4}$，……………………（10 分）

又 $|AQ|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2}=\sqrt{t^2(y_1-y_2)^2+(y_1+y_2)^2}=\sqrt{(t^2+1)(y_1+y_2)^2-4t^2y_1y_2}=$

$\dfrac{12t^2}{3t^2+4}$，……………………………………………………………………………………………………（11 分）

故 $\dfrac{|AQ|}{|GF_2|}=4$，所以 $\dfrac{|AQ|}{|GF_2|}$ 为定值，定值为 4. ………………………………………………………（12 分）

21. **解**：(1)证明：取线段 AB 的中点 G，连接 A_1G，EG，如图所示，

因为 E，G 分别为 BC，AB 的中点，所以 $EG/\!/AC$，

在三棱台 $A_1B_1C_1$-ABC 中，$A_1C_1/\!/AC$，所以，$EG/\!/A_1C_1$，且 $D\in A_1C_1$，

故 E，G，A_1，D 四点共面. …………………………………………………………………………（2 分）

因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC，$AG\subset$ 平面 ABC，所以 $AA_1\perp AG$，

因为 $AA_1=A_1B_1=AG=1$，$AG/\!/A_1B_1$，$AA_1\perp AG$，

所以四边形 AA_1B_1G 是正方形，所以 $AB_1\perp A_1G$.

又 $AB_1\perp A_1C_1$，$A_1C_1\cap A_1G=A_1$，A_1C_1，$A_1G\subset$ 平面 A_1DEG，所以 $AB_1\perp$ 平面 A_1DEG.

因为 $DE\subset$ 平面 A_1DEG，所以 $AB_1\perp DE$. ………………………………………………………………（4 分）

(2)延长 EF 与 C_1B_1 相交于点 Q，连接 DQ，则 $DQ\cap A_1B_1=M$.

因为 F，E 分别为 BB_1 和 BC 的中点，$B_1Q/\!/BE$，所以 $\dfrac{B_1Q}{BE}=\dfrac{B_1F}{BF}=1$，

则 $B_1Q=BE=\dfrac{1}{2}BC=B_1C_1$，所以，$B_1$ 为 C_1Q 的中点.

又因为 D 为 A_1C_1 的中点，且 $A_1B_1\cap DQ=M$，则 M 为 $\triangle A_1C_1Q$ 的重心，

所以 $A_1M=\dfrac{2}{3}A_1B_1=\dfrac{2}{3}$，……………………………………………………………………………（7 分）

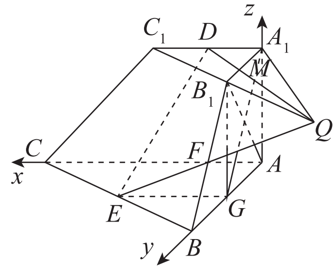
因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC，$AC\subset$ 平面 ABC，所以 $AA_1\perp AC$.

因为 $AB_1\perp A_1C_1$，$A_1C_1/\!/AC$，所以 $AB_1\perp AC$.

又因为 $AA_1\cap AB_1=A$，AA_1，$AB_1\subset$ 平面 AA_1B_1B，

所以 $AC\perp$ 平面 AA_1B_1B，所以 AC，AB，AA_1 两两垂直，

以 A 为原点，AC，AB，AA_1 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(2,0,0)$，$E(1,1,0)$，$M\left(0,\frac{2}{3},1\right)$，

所以，$\overrightarrow{AC}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{AM}=\left(0,\frac{2}{3},1\right)$，$\overrightarrow{AE}=(1,1,0)$. ………………………………………………………（9 分）

设平面 AMC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AC}=2a=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}b+c=0,\end{cases}$

取 $b=-3$，则 $\boldsymbol{n}_1=(0,-3,2)$. ………………………………………………………………………（10 分）

设平面 AME 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AE}=x+y=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}y+z=0,\end{cases}$

取 $y=-3$，可得 $\boldsymbol{n}_2=(3,-3,2)$. ……………………………………………………………………（11 分）

所以，$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{13}{\sqrt{13}\times\sqrt{22}}=\frac{\sqrt{286}}{22}$，

故平面 AMC 与平面 AME 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{286}}{22}$. ……………………………………………（12 分）

22. **解**：(1) $f(x)=\ln x-ax+1$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$， ……………（1 分）

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)$ 不可能有两个零点，故舍去；…
………（2 分）

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $0<x<\frac{1}{a}$，令 $f'(x)<0$，解得 $x>\frac{1}{a}$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}$.

要使 $f(x)$ 有两个零点，则 $f(x)_{\max}=\ln\frac{1}{a}>0$，解得 $0<a<1$. ……………………………………（3 分）

又 $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\ln\frac{1}{\mathrm{e}}-a\cdot\frac{1}{\mathrm{e}}+1=-\frac{a}{\mathrm{e}}<0$，$f\left(\frac{4}{a^2}\right)=\ln\frac{4}{a^2}-\frac{4}{a}+1<\frac{2}{a}-\frac{4}{a}+1=1-\frac{2}{a}<0$，

所以当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{1}{a}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{a},\frac{4}{a^2}\right)$ 上各有一个零点 x_2,x_1， …………………………（4 分）

且 $x_1>2x_2$，所以 $\begin{cases}\ln x_1-ax_1+1=0,\\ \ln x_2-ax_2+1=0,\end{cases}$

由 $f(x)$ 的单调性知，当 $x\in(x_2,x_1)$ 时，$f(x)>0$，当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时，$f(x)<0$.

因为 $x_2<2x_2<x_1$，所以 $f(2x_2)>0$，即 $\ln(2x_2)-2ax_2+1>\ln x_2-ax_2+1$，

所以 $ax_2<\ln 2$，而 $\ln x_2+1=ax_2$，即 $\ln x_2+1<\ln 2$，所以 $0<x_2<\frac{2}{\mathrm{e}}$，而 $a=\frac{\ln x_2+1}{x_2}$.

令 $h(x)=\frac{\ln x+1}{x}$，$x\in\left(0,\frac{2}{\mathrm{e}}\right)$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x-1}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$，

因为 $x\in\left(0,\frac{2}{e}\right)$，所以 $-\ln x>-\ln\frac{2}{e}>0$，所以 $h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{2}{e}\right)$ 上单调递增，

所以 $h(x)<h\left(\frac{2}{e}\right)=\frac{\ln 2}{\frac{2}{e}}=\frac{e\ln 2}{2}$，所以 $a\in\left(0,\frac{e\ln 2}{2}\right)$. …………（6 分）

(2)因为 $x_1>2x_2>0$，所以 $e\cdot\left(\frac{x_2^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}\right)\geqslant e\cdot 2\sqrt{x_1x_2}$，当且仅当 $x_1=x_2$ 时取等号，

而 $x_1>2x_2>0$，故 $e\cdot\left(\frac{x_2^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}\right)>e\cdot 2\sqrt{x_1x_2}$， …………（7 分）

要证 $e\cdot\left(\frac{x_2^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}\right)>4\sqrt{2}$，即证 $e\cdot 2\sqrt{x_1x_2}\geqslant 4\sqrt{2}$，即证 $x_1x_2\geqslant\frac{8}{e^2}$，即证 $\ln x_1x_2\geqslant\ln\frac{8}{e^2}$，

即证 $\ln x_1+\ln x_2\geqslant 3\ln 2-2$. …………（8 分）

设 $t=\frac{x_1}{x_2}$，因为 $x_1>2x_2>0$，所以 $t>2$，

由(1)得 $\begin{cases}\ln x_1+1=ax_1,\\ \ln x_2+1=ax_2,\end{cases}$ 两式作差，化简得 $\ln x_2=\frac{\ln t}{t-1}-1$，$\ln x_1=\frac{\ln t}{t-1}-1+\ln t$，

所以 $\ln x_1+\ln x_2=\frac{2\ln t}{t-1}+\ln t-2$. …………（9 分）

令 $g(t)=\frac{2\ln t}{t-1}+\ln t-2$，$t>2$，则 $g'(t)=\frac{t^2-1-2t\ln t}{t(t-1)^2}$.

令 $\varphi(t)=t^2-1-2t\ln t$，则 $\varphi'(t)=2t-2-2\ln t$，$\varphi''(t)=2-\frac{2}{t}>0$，易知 $\varphi'(t)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

故 $\varphi'(t)>\varphi'(2)=2-2\ln 2>0$，所以 $\varphi(t)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\varphi(t)>\varphi(2)=3-4\ln 2>0$，

所以 $g(t)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(t)>g(2)=3\ln 2-2$，即 $\ln x_1+\ln x_2>3\ln 2-2$ 得证.

所以不等式 $e\cdot\left(\frac{x_2^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}\right)>4\sqrt{2}$ 得证. …………（12 分）