数学答案

1.【解答】解：$\frac{a-i}{3+i}=\frac{(a-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{3a-1-(a+3)i}{10}$，

由于$\frac{a-i}{3+i}$为实数，则$a+3=0$，所以$a=-3$，

故选：A．

【点评】本题主要考查复数的四则运算，以及复数模公式，属于基础题．

2.【解答】解：由$Venn$图可知，$A\otimes B=\{x\,|\,x\in(A\bigcup B)$，$x\notin(A\bigcap B)\}$，

因为$A=\{x\,|\,x=2n+1$，$n\in N$，$n,\ 4\}=\{1$，3，5，7，$9\}$，$B=\{2$，3，4，5，6，$7\}$，

则$A\bigcup B=\{1$，2，3，4，5，6，7，$9\}$，$A\bigcap B=\{3$，5，$7\}$，

因此，$A\otimes B=\{1$，2，4，6，$9\}$．

故选：D．

3.【解答】解：①$f(-x)=f(x)$说明$f(x)$为偶函数，②$\forall x_1,x_2\in(0,1),\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，说明函数在$(0,1)$上单调递减．

A不满足②，B不满足①，

C不满足②，因为$f(x)=\cos 4x$在$(0,\frac{\pi}{4})$单调递减，在$(\frac{\pi}{4},1)$单调递增．

对于D，满足①，当$x\in(0,1)$，$f(x)=ln(1-x)$，单调递减，也满足②．

故选：D．

4.【解答】解：因为$\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{EL}+\overrightarrow{LF}=\overrightarrow{HE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EK}+\overrightarrow{HJ}$，

$\overrightarrow{EK}=\overrightarrow{HK}-\overrightarrow{HE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HJ}-\overrightarrow{HE}$，

所以$\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{HE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EK}+\overrightarrow{HJ}=\overrightarrow{HE}+\frac{1}{3}(\frac{1}{3}\overrightarrow{HJ}-\overrightarrow{HE})+\overrightarrow{HJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{HE}+\frac{10}{9}\overrightarrow{HJ}$，

所以$\lambda+\mu=\frac{2}{3}+\frac{10}{9}=\frac{16}{9}$，

故选：B．

5.【解答】解：由$e..\frac{\sqrt{3}}{2}$得$e^2=1-\frac{b^2}{a^2}...\frac{3}{4}$，所以$\frac{b}{a},,\ \frac{1}{2}$，

掷两颗骰子得到点数(a,b)共有36个基本事件，

其中满足 $\frac{b}{a} \leqslant \frac{1}{2}$ 的基本事件有：

$(2,1)$，$(3,1)$，$(4,1)$，$(4,2)$，$(5,1)$，$(5,2)$，$(6,1)$，$(6,2)$，$(6,3)$，共 9 个，

故椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ 的离心率 $e \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的概率为 $p=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$．

故选：C．

6.【解答】解：这 8 张连号的门票不妨设为 1，2，3，4，5，6，7，8，

先考虑 3 张连号的门票的选法共有 6 种情况：(1，2，3)，(2，3，4)，(3，4，5)，(4，5，6)，(5，6，7)，(6，7，8)，

再考虑 2 张连号的门票的选法：

对于：(1，2，3)，(2，3，4)，(3，4，5)，分别有 4，3，3 种选法；

利用对称性可得：对于 (4，5，6)，(5，6，7)，(6，7，8) 分别有 3，3，4 种选法．

最后考虑剩余的 3 张随机分到剩余的 3 个家庭的选法共有 A_3^3 种．

利用加法与乘法原理可得这 8 张门票分配到家庭的不同方法种数 $=(4+3+3)\times 2\times A_3^3=120$ 种．

故选：C．

7.【解答】解：由 $a=-\frac{ln3}{6ln2a}$，得 $aln2a=\frac{1}{6}ln(2\times\frac{1}{6})$，

由 $b=\frac{ln2-ln7}{7ln2b}$．得 $bln2b=\frac{1}{7}ln(2\times\frac{1}{7})$，

由 $(2c)^c=2^{-\frac{1}{4}}$，得 $cln2c=\frac{1}{8}ln(2\times\frac{1}{8})$．

设函数 $f(x)=xln2x$，则 $f'(x)=ln2x+x\times\frac{2}{2x}=ln2x+1$，

令 $f'(x)=0$，则 $x=\frac{1}{2e}$，

当 $x\in(0,\frac{1}{2e})$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(\frac{1}{2e},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

又因为 $0<\frac{1}{8}<\frac{1}{7}<\frac{1}{6}<\frac{1}{2e}$，

所以 $f(\frac{1}{6})<f(\frac{1}{7})<f(\frac{1}{8})$，

又因为 $f(a)=f(\frac{1}{6})$，$f(b)=f(\frac{1}{7})$，$f(c)=f(\frac{1}{8})$，

所以 f（a）$< f$（b）$< f$（c），

又因为 $a > \dfrac{1}{6}$，$b > \dfrac{1}{7}$，$c > \dfrac{1}{8}$，

所以 a，b，c 均大于 $\dfrac{1}{2e}$，

又因为 $f(x)$ 在 $(\dfrac{1}{2e},+\infty)$ 上单调递增，

所以 $a < b < c$．

故选：A．

8.【解答】解：外接球的表面积为 20π，可得外接球半径为 $\sqrt{5}$．

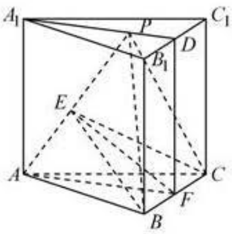
因为正三棱柱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长 $AB = 2\sqrt{3}$，

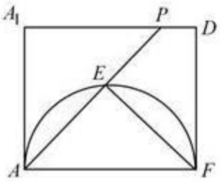
所以 $A_1D = \dfrac{\sqrt{3}}{2}A_1B_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB = 3$，

所以△ $A_1B_1C_1$ 的外接圆半径为 $r = \dfrac{2}{3}A_1D = 2$，

设三棱柱的侧棱长为 h，则有 $(\dfrac{h}{2})^2 + r^2 = 5$，解得 $h = 2$，即侧棱 $AA_1 = h = 2$，

设 BC 的中点为 F，作出截面如图所示，





因为 $AP \perp \alpha$，$EF \subset \alpha$，所以 $AE \perp EF$，所以点 E 在以 AF 为直径的圆上，

当点 E 在弧 AF 的中点时，此时点 E 到底面 ABC 距离的最大，且最大值为 $\dfrac{1}{2}AF = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{3} = \dfrac{3}{2}$，

因为 $DF < AF$，所以此时点 P 在线段 A_1D 上，符合条件，

所以三棱锥 $A-BCE$ 的体积的最大值为 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}AF\times S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$．

故选：A．

9.【解答】解：令 $x = 1$ 可得：$(\dfrac{1}{2})^n = \dfrac{1}{128}$，解得 $n = 7$，故该二项式为 $(\sqrt{x} - \dfrac{1}{2x})^7$，

故展开式中共 $7+1=8$ 项，故 A 错误；

二项式系数最大的项为中间的第 4、5 项，故 B 错误；

所有二项式系数之和为$2^7=128$，故C正确；

展开式的通项为$T_{k+1}=(-\frac{1}{2})^k\cdot C_7^k\cdot x^{\frac{7-3k}{2}}$，$k=0$，1，2，……，7，当$k=1$，3，5，7时，为有理项，

故D正确.

故选：CD.

10.【解答】解：因为

$f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})+\cos(\omega x-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}\sin\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x+\frac{1}{2}\sin\omega x=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$，

又因为将$f(x)$图象上所有的点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$（纵坐标不变）得到函数$g(x)$的图象，

所以$g(x)=2\sin(2\omega x+\frac{\pi}{3})$，$\omega>0$，

当$x\in(0,\frac{\pi}{12})$时，$2\omega x+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3}$，$\frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{3})$，

又因为$g(x)$在$(0,\frac{\pi}{12})$上恰有一个极值点，

所以$\frac{\pi}{2}<\frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}$，

解得$1<\omega\leqslant 7$，

故选：BCD.

11.【解答】解：由$x+2y=xy$，可得$\frac{8}{x}=4-\frac{4}{y}$且$y>1$，所以$e^y-\frac{8}{x}=e^y+\frac{4}{y}-4$，

令$g(y)=e^y+\frac{4}{y}-4,y\in(1,+\infty)$，可得$g'(y)=e^y-\frac{4}{y^2}$，

令$h(y)=e^y-\frac{4}{y^2}$，可得$h'(y)=e^y+\frac{8}{y^3}>0$，$h(y)$为单调递增函数，

即$g'(y)$单调递增，

又$g'(1.1)=e^{1.1}-\frac{4}{1.1^2}<0,g'(1.2)=e^{1.2}-\frac{4}{1.2^2}>0$，

所以存在$y_0\in(1.1,1.2)$，使得$g'(y_0)=e^{y_0}-\frac{4}{y_0^2}=0$，

所以$g_{min}=g(y_0)=e^{y_0}+\frac{4}{y_0}-4=\frac{4}{y_0^2}+\frac{4}{y_0}-4,y_0\in(1.1,1.2)$，

设$f(y_0)=\frac{4}{y_0^2}+\frac{4}{y_0}-4$，则$f'(y_0)=-\frac{8}{y_0^3}-\frac{4}{y_0^2}$，

因为 $y_0\in(1.1,1.2)$，所以 $f'(y_0)<0$，所以 $f(y_0)$ 在 $(1.1,1.2)$ 上单调递减，

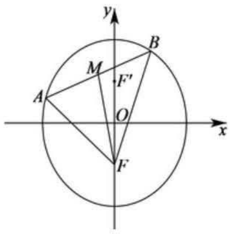
所以 $f(y_0)>f(1.2)=\dfrac{19}{9}>2$，

又因为 g（2）$=e^2-2>e$，$g(y)$ 在 $(y_0,\ +\infty)$ 上递增，所以 D 正确．

故选：ABC．

12．【解答】解：在椭圆 C 中，$a=2,b=\sqrt{3},c=\sqrt{a^2-b^2}=1$，

由题意可得 $F(0,-1)$，上焦点记为 $F'(0,1)$，



对于 A 选项，设点 $A(x_1,\ y_1)$、$B(x_2,\ y_2)$，

联立 $\begin{cases} y=kx+1 \\ 4x^2+3y^2=12 \end{cases}$，可得 $(3k^2+4)x^2+6kx-9=0$，

$\triangle=36k^2+36(3k^2+4)=144(k^2+1)>0$，

由韦达定理可得 $x_1+x_2=-\dfrac{6k}{3k^2+4},x_1x_2=-\dfrac{9}{3k^2+4}$，

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(-\dfrac{6k}{3k^2+4})^2+\dfrac{36}{3k^2+4}}=\dfrac{12(k^2+1)}{3k^2+4}$

$=4-\dfrac{4}{3k^2+4}\in[3,4)$，

所以，$|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=4a-|\overrightarrow{AB}|=8-|\overrightarrow{AB}|\in(4,5]$，$A$ 错；

对于 B 选项，设线段 AB 的中点为 $M(x,y)$，

由题意可得 $\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{3}+\dfrac{y_1^2}{4}=1 \\ \dfrac{x_2^2}{3}+\dfrac{y_2^2}{4}=1 \end{cases}$，两式作差可得 $\dfrac{x_1^2-x_2^2}{3}+\dfrac{y_1^2-y_2^2}{4}=0$，

因为直线 AB 的斜率存在，则 $x_1\neq x_2$，所以，$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=k\cdot\dfrac{2y}{2x}=-\dfrac{4}{3}$，

整理可得 $ky=-\dfrac{4}{3}x$，又因为 $y=kx+1$，消去 k 可得 $4x^2+3y^2-3y=0$，其中 $y>0$，

所以，$\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=(x_1,y_1+1)+(x_2,y_2+1)=(x_1+x_2,y_1+y_2+2)=(2x,2y+2)$，

所以，

$|\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}|=\sqrt{4x^2+4(y+1)^2}=\sqrt{4x^2+4y^2+8y+4}=\sqrt{3y-3y^2+4y^2+8y+4}=\sqrt{y^2+11y+4}>2$，$B$ 对；

对于 C 选项，当 $k=1$ 时，直线 l 的方程为 $y=x+m$，即 $x=y-m$，

联立 $\begin{cases}x=y-m\\4x^2+3y^2=12\end{cases}$，可得 $7y^2-8my+4m^2-12=0$，

$\triangle=64m^2-28(4m^2-12)=16(21-3m^2)>0$，解得 $-\sqrt{7}<m<\sqrt{7}$，

由韦达定理可得 $y_1+y_2=\dfrac{8m}{7},y_1y_2=\dfrac{4m^2-12}{7}$，

$|\overrightarrow{FA}|=\sqrt{x_1^2+(y_1+1)^2}=\sqrt{3-\dfrac{3y_1^2}{4}+y_1^2+2y_1+1}=\sqrt{\dfrac{y_1^2}{4}+2y_1+4}=|2+\dfrac{y_1}{2}|=2+\dfrac{y_1}{2}$，

同理 $|\overrightarrow{FB}|=2+\dfrac{y_2}{2}$，所以，$|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=4+\dfrac{y_1+y_2}{2}=4+\dfrac{4m}{7}\in(4-\dfrac{4\sqrt{7}}{7},4+\dfrac{4\sqrt{7}}{7})$，

因为 $\dfrac{5}{2}\in(4-\dfrac{4\sqrt{7}}{7},4+\dfrac{4\sqrt{7}}{7})$，所以，当 $k=1$ 时，$\exists m\in R$，使得 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=\dfrac{5}{2}$，$C$ 对；

对于 D 选项，设线段 AB 的中点为 $M(x,y)$，

由 B 选项可知，$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\dfrac{2y}{2x}=-\dfrac{4}{3}$，即 $y=-\dfrac{4}{3}x$，即 $4x+3y=0$，由 $\begin{cases}y=-\dfrac{4}{3}x\\4x^2+3y^2=12\end{cases}$ 可得

$x=\pm\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$，

故点 M 的横坐标的取值范围是 $(-\dfrac{3\sqrt{7}}{7},\dfrac{3\sqrt{7}}{7})$，而点 F 到直线 $4x+3y=0$ 的距离为 $d=\dfrac{3}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{3}{5}$，

由 $\begin{cases}4x+3y=0\\y=\dfrac{3}{4}x-1\end{cases}$ 可得 $x=\dfrac{12}{25}\in(-\dfrac{3\sqrt{7}}{7},\dfrac{3\sqrt{7}}{7})$，当且仅当点 $M(\dfrac{12}{25},-\dfrac{16}{25})$ 时，

$|\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}|$ 取最小值 $\dfrac{6}{5}$，D 错.

故选：BC.

【点评】本题考查了椭圆的性质，属于中档题.

13. 【解答】解：$\because$ 等差数列 $\{a_n\}$ 前 9 项的和为 27，$a_{10}=8$，

$\therefore 9a1+9\times 82d=27$，$a1+9d=8$，解得 $a_1=-1$，$d=1$，

$\therefore a_{15}=a_1+14d=-1+14=13$.

故答案为：13．

14.【解答】解：因为100个数据x_1，x_2，x_3，…，x_{100}的平均值$\overline{x}=\frac{1}{100}\sum\limits_{i=1}^{100}x_i=72$，

方差$s^2=\frac{1}{100}\sum\limits_{i=1}^{100}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{100}(\sum\limits_{i=1}^{100}x_i^2-100\overline{x}^2)=\frac{1}{100}[100\times(72^2+36)-100\times72^2]=36$，

所以μ的估计值为$\mu=72$，σ的估计值为$\sigma=6$．

设该市高中生的身体素质指标值为X，

由$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx0.9545$，得$P(72-12\leqslant X\leqslant72+12)=P(60\leqslant X\leqslant84)\approx0.9545$，

$P(X>84)=P(X>\mu+2\sigma)=P(X<\mu-2\sigma)=\frac{1-P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)}{2}\approx\frac{1-0.9545}{2}$，

所以$P(X\geqslant60)=P(60\leqslant X\leqslant84)+P(X>84)\approx0.9545+\frac{1}{2}\times(1-0.9545)=0.97725\approx97.7\%$．

故答案为：97.7%．

15.【解答】解：抛物线$y=\frac{1}{4}x^2$的准线方程为$y=-1$，焦点坐标为$(0,1)$．

设A，B，C，D，E的纵坐标分别为y_1，y_2，y_3，y_4，y_5，则

$\because\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$，

$\therefore y_1-1+y_2-1+y_3-1+y_4-1+y_5-1=0$，

$\therefore y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=5$，

根据抛物线的定义，可得

$|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|+|\overrightarrow{FD}|+|\overrightarrow{FE}|=y_1+1+y_2+1+y_3+1+y_4+1+y_5+1=10$，

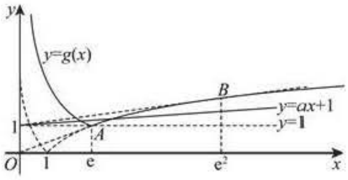
故选：B．

16.【解答】解：根据$\frac{e}{x}$与$|lnx|$大小关系（比较$\frac{e}{x}$与$|lnx|$大小的推理见后附），

可知$f(x)=|\frac{e}{x}+lnx|+|\frac{e}{x}-lnx|=2max\left\{\frac{e}{x},|lnx|\right\},(x>0)$，

设$g(x)=max\left\{\frac{e}{x},|lnx|\right\}$，注意到曲线$y=\frac{e}{x}$与曲线$y=|lnx|$恰好交于点$A(e,1)$，

显然，$g(x)=\begin{cases}\frac{e}{x},0<x\leqslant e\\ lnx,x>e\end{cases}$，作出$g(x)$的大致图象如图，



可得 $g(x)$ 的最小值是 1，从而 $f(x)$ 的最小值是 2.

由 $f(x)=2ax+2$，得 $max\left\{\frac{e}{x},|lnx|\right\}=ax+1$.

设直线 $y=ax+1$ 与曲线 $y=lnx(x>e)$ 切于点 $B(x_0$， $lnx_0)$， $y'=\frac{1}{x}$，直线 $y=ax+1$ 过定点 $(0,1)$，

则 $a=\frac{lnx_0-1}{x_0-0}=\frac{1}{x_0}$，

解得 $x_0=e^2$，从而 $a=e^{-2}$.

由图象可知，若关于 x 的方程 $g(x)=ax+1$ 有 3 个实数解，

则直线 $y=ax+1$ 与曲线 $g(x)$ 有 3 个交点，则 $0<a<e^{-2}$，

即所求实数 a 的取值范围是 $(0,e^{-2})$.

故答案为：2；$(0,e^{-2})$.

附：当 $0<x\leqslant 1$ 时，设 $h(x)=\frac{e}{x}-|lnx|=\frac{e}{x}+lnx$，则 $h'(x)=\frac{x-e}{x^2}<0$，

所以 $h(x)$ 在区间 $(0$， $1]$ 上单调递减，从而 $h(x)>h$ （1） $=e>0$，此时 $\frac{e}{x}>|lnx|$；

当 $x>1$ 时，设 $m(x)=\frac{e}{x}-|lnx|=\frac{e}{x}-lnx$， $m(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以当 $1<x<e$ 时， $m(x)>m$ （e） $=0$，即 $\frac{e}{x}>|lnx|$；

当 $x=e$ 时， m （e） $=0$，即 $\frac{e}{x}=|lnx|$；

当 $x>e$ 时， $m(x)<m$ （e） $=0$，即 $\frac{e}{x}<|lnx|$.

【点评】本题主要考查利用导数研究函数的最值，函数的零点与方程根的关系，考查数形结合思想与运算求解能力，属于中档题.

17.【解答】（1）解：记 T_n 为正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积，且 $a_1=1$， $a_2=2$， $T_nT_{n+2}=2T_{n+1}^2$，

则 $\frac{T_{n+2}}{T_{n+1}}=\frac{2T_{n+1}}{T_n}$，

即 $a_{n+2}=2a_{n+1}$，

又 $a_1=1$， $a_2=2$，

即 $a_2=2a_1$，

则数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，

即 $a_n=2^{n-1}$；

（2）证明：由（1）可得 $\frac{T_{2n-1}}{T_{2n}}=\frac{1}{a_{2n}}=\frac{1}{2^{2n-1}}$，

又数列 $\{\frac{1}{2^{2n-1}}\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项， $\frac{1}{4}$ 为公比的等比数列，

即 $\frac{T_1}{T_2}+\frac{T_3}{T_4}+\ldots+\frac{T_{2n-1}}{T_{2n}}=\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{4})^n]}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times(\frac{1}{4})^n<\frac{2}{3}$.

【点评】本题考查了利用数列递推式求数列的通项公式，重点考查了等比数列的求和公式，属基础题.

18. 【解答】解：（1）$\because \sin A\cos B=2\sin A-\cos A\sin B$，则 $2\sin A=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin(A+B)=\sin C$，

$\therefore \frac{\sin C}{\sin A}=2$；

（2）由（1）得 $\sin C=2\sin A$，由正弦定理得 $c=2a$，

若选条件①：由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$， 即 $\frac{a^2+4a^2-9}{4a^2}=\frac{11}{16}$，

又 $a>0$，解得 $a=2$，则 $c=4$，

此时 ΔABC 存在且唯一确定，

$\because \cos B=\frac{11}{16}>0$，则 $B\in(0,\frac{\pi}{2})$，

$\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{3\sqrt{15}}{16}$，

$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2\times4\times\frac{3\sqrt{15}}{16}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$；

若选条件②：$\because c>a$，即 $C>A$，

$\therefore$若 C 为锐角，则 $\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{1}{4}$，

由余弦定理 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，即 $\frac{1}{4}=\frac{a^2+9-4a^2}{6a}$，整理得 $2a^2+a-6=0$，且 $a>0$，解得 $a=\frac{3}{2}$，

则 $c=3$；

若 C 为钝角，则 $\cos C=-\sqrt{1-\sin^2 C}=-\frac{1}{4}$，

由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，即 $-\frac{1}{4}=\frac{a^2+9-4a^2}{6a}$，整理得 $2a^2-a-6=0$，且 $a>0$，解得 $a=2$，

则 $c=4$；

综上所述，此时 ΔABC 存在但不唯一确定，不合题意；

若条件③：由题意得 $a+b+c=9$，即 $a+3+2a=9$，解得 $a=2$，则 $c=4$，

$\therefore$ 此时 ΔABC 存在且唯一确定，

由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{4+16-9}{2\times2\times4}=\frac{11}{16}>0$，

则 $B\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{3\sqrt{15}}{16}$，

$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2\times4\times\frac{3\sqrt{15}}{16}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$.

19.【解答】解：（1）由 $2a=2$，$2c=2\sqrt{3}$ 知 $a^2=1$，$c^2=3$，$b^2=2$，

故双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 或 $y^2-\frac{x^2}{2}=1$．由点 $P(0,-1)$ 到渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{a}}{a}$，知双曲线方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$．

（2）设 $l:y=kx-1$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$．

由 $\begin{cases}y=kx-1\\ y=\sqrt{2}x\end{cases}$ 可得 $x_D=\frac{1}{k-\sqrt{2}}$；由 $\begin{cases}y=kx-1\\ y=-\sqrt{2}x\end{cases}$，可得 $x_E=\frac{1}{k+\sqrt{2}}$．

$|DE|=\sqrt{1+k^2}\,|\frac{1}{k-\sqrt{2}}-\frac{1}{k+\sqrt{2}}|=\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+k^2}}{|k^2-2|}$

由 $\begin{cases}y=kx-1\\ 2x^2-y^2=2\end{cases}$ 得 $(2-k^2)x^2+2k-3=0$，$\therefore x_1+x_2=-\frac{2k}{2-k^2}$，$x_1x_2=-\frac{3}{2-k^2}$．

$\therefore |AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{1+k^2}\cdot2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-k^2}}{|2-k^2|}$．

由 ΔODE 和 ΔOAB 的高相等，可 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{|DE|}{|AB|}=\frac{1}{\sqrt{3-k^2}}$，

由 $\begin{cases}2-k^2\neq0\\ 4k^2+12(2-k^2)>0\\ -\frac{3}{2-k^2}<0\end{cases}$，得 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$，

所以$3-k^2\in(1，3]$，$\dfrac{S_1}{S_2}\in[\dfrac{\sqrt{3}}{3},1)$.

【点评】本题考查直线与双曲线的位置关系的综合应用，双曲线方程的求法，考查转化思想以及计算能力，是中档题.

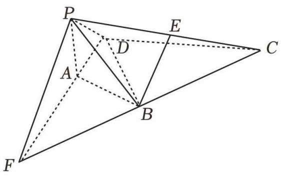
20.【解答】证明：(1) $\because AB^2+AD^2=BD^2$，$AB^2+PA^2=PB^2$，

$\therefore AB\perp AD$，$AB\perp PA$，

在直角三角形BAD中，$\angle BDA=60°$，

又$\angle BDC=60°$，BD为$\angle ADC$的平分线，

延长CB，DA交于点F，连接PF，



在ΔCDF中，$BD\perp BC$，

$\therefore \Delta CDF$是等腰三角形，

$\therefore$点B是CF的中点，

$\because$直线$BE//$平面PAD，过BE的平面PFC与平面PAD的交线为PF，

$\therefore BE//PF$，

$\because B$是CF的中点，

$\therefore E$是PC的中点；

(2) 证明：由 (1) 可得，$BA\perp AD$，$BA\perp PA$，$AD\bigcap PA=A$，AD，$PA\subset$平面PAD，

$\therefore \angle PAD$为二面角$P-AB-D$的平面角，

$\therefore \angle PAD=60°$，

又$PA=AD=1$，

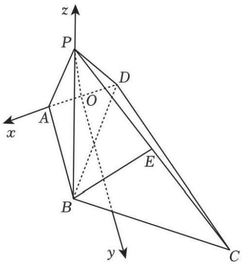
$\therefore \Delta PAD$为正三角形，

又$BA\perp AD$，$BA\perp PA$，$AD\bigcap PA=A$，AD，$PA\subset$平面PAD，

故$BA\perp$平面PAD，$BA\subset$平面$ABCD$，平面$PAD\perp$平面$ABCD$，

取AD的中点为O，连OP，则$OP\perp AD$，$OP\perp$平面$ABCD$，

如图建立空间直角坐标系，



则 $A(\frac{1}{2},0,0)$， $B(\frac{1}{2},\sqrt{3},0)$， $C(-\frac{5}{2},2\sqrt{3},0)$， $D(-\frac{1}{2},0,0)$， $P(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2})$，

$\therefore \overrightarrow{DP}=(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}),\overrightarrow{BD}=(-1,-\sqrt{3},0),\overrightarrow{DC}=(-2,2\sqrt{3},0)$，

设 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1),\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 分别为平面 PBD 和平面 PCD 的法向量，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BD}=-x_1-\sqrt{3}y_1=0\end{cases}$，取 $y_1=-1$，则 $\vec{m}=(\sqrt{3},-1,-1)$，

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}x_2+\frac{\sqrt{3}}{2}z_2=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=-2x_2+2\sqrt{3}y_2=0\end{cases}$，取 $y_2=1$，则 $\vec{n}=(\sqrt{3},1,-1)$，

$\therefore \cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{3}{5}$，

$\because \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}<\cos\theta=\frac{3}{5}<\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4},\cos\theta$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 范围内单调递减，

$\therefore$ 平面 PBD 和平面 PCD 所成夹角满足 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{3}$.

21.【解答】解：（1）当 $m=0$ 时，

用分层抽样的方法抽取购买传统燃油车的 6 人中，男性有 2 人，女性有 4 人，

由题意可知， X 的可能取值为 1，2，3，

$P(X=1)=\frac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}=\frac{1}{5}$， $P(X=2)=\frac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}=\frac{3}{5}$， $P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，

X 的分布列如下表：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=2$.

（2）(i) 零假设为 H_0:

性别与是否购买新能源汽车独立，即性别与是否购买新能源汽车无关联，

当 $m=0$ 时，

$A_{22}=80$， $B_{22}=70$， $A_{23}=20$， $B_{23}=0.5\times0.3\times200=30$，

$A_{32}=60$， $B_{32}=0.5\times0.7\times200=70$， $A_{33}=40$， $B_{33}=0.5\times0.3\times200=30$，

$K^2=\frac{(A_{22}-B_{22})^2}{B_{22}}+\frac{(A_{23}-B_{23})^2}{B_{23}}+\frac{(A_{32}-B_{32})^2}{B_{32}}+\frac{(A_{33}-B_{33})^2}{B_{33}}=\frac{(80-70)^2}{70}+\frac{(20-30)^2}{30}+\frac{(60-70)^2}{70}+\frac{(40-30)^2}{30}\approx9.524>7.879x_{0.006}$，

$\therefore$ 根据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为性别与是否购买新能源汽车有关联，此推断犯错误的概率不超过 0.005.

（ii） $K^2=\frac{(80-m-70)^2}{70}+\frac{(20+m-30)^2}{30}+\frac{(60+m-70)^2}{70}+\frac{(40-m-30)^2}{30}=\frac{2\times(10-m)^2}{21}$，

由题意可知 $\frac{2\times(10-m)^2}{21}..2.706$，

整理得 $(10-m)^2..28.413$，

又 $m\in N$， $m<10$， $\therefore m,\ 4$，

所以 m 的最大值为 4，

又 $80-4=76$，

$\therefore$ 至少有 76 名男性购买新能源汽车.

21.【解答】解：（1）列联表如下：

	选择甲公司直播间购物	选择乙公司直播间购物	合计
用户年龄段 $19-24$ 岁	40	10	50
用户年龄段 $25-34$ 岁	20	30	50
合计	60	40	100

所以 $\chi^2=\frac{100\times(40\times30-20\times10)^2}{60\times40\times50\times50}=\frac{50}{3}>10.828$，

故有 99.9% 的把握认为选择哪家直播间购物与用户的年龄有关；

（2）由题设，小李第二天去乙直播间的基本事件：{第一天去甲直播间，第二天去乙直播间}；{第一天去乙直播间，第二天去乙直播间}，两种情况，

所以小李第二天去乙直播间购物的概率 $P=0.5\times(1-0.7)+0.5\times(1-0.8)=0.25$；

（3）由题设，设五人中下单成功的人数为 X，则 $X\sim(5,p)$，

所以 $f(p)=C_5^2(1-p)^3p^2=10(1-p)^3p^2$，令 $g(p)=(1-p)^3p^2=p^2-3p^3+3p^4-p^5$，

所以 $g'(p)=p(2-9p+12p^2-5p^3)$，令 $h(p)=2-9p+12p^2-5p^3$，

所以 $h'(p)=-9+24p-15p^2=-15(p-\frac{4}{5})^2+\frac{3}{5}$，

$h'(p)$ 开口向下，且在 $(0,\frac{4}{5})$ 上递增，$(\frac{4}{5},1)$ 上递减，又 $h'(\frac{3}{5})=h'(1)=0$，

故 $(0,\frac{3}{5})$ 上 $h'(p)<0$，$h(p)$ 递减；$(\frac{3}{5},1)$ 上 $h'(p)>0$，$h(p)$ 递增；

由 $h(\frac{2}{5})=0,h(1)=0$，故 $(0,\frac{2}{5})$ 上 $h(p)>0$，即 $g'(p)>0,(\frac{2}{5},1)$ 上 $h(p)<0$，即 $g'(p)<0$，

所以 $g(p)$ 在 $(0,\frac{2}{5})$ 上递增，$(\frac{2}{5},1)$ 上递减，即 $f(p)$ 在 $(0,\frac{2}{5})$ 上递增，$(\frac{2}{5},1)$ 上递减，

所以 $f(p)_{max}=f(\frac{2}{5})$，即 $p_0=\frac{2}{5}$.

22. 【解答】解：（1）由 $f(x)=(lnx+1)x-mx^2+m$ 得，$f'(x)=lnx-2mx+2(x>0)$，

因为 $f(x)$ 单调递减，所以 $f'(x)=lnx-2mx+2\leqslant 0$ 在 $x>0$ 时恒成立，

所以 $2m\geqslant\frac{lnx+2}{x}$ 在 $x>0$ 时恒成立，即 $2m\geqslant(\frac{lnx+2}{x})_{max}$，

令 $g(x)=\frac{lnx+2}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{-lnx-1}{x^2}$，

可知 $0<x<\frac{1}{e}$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；$x>\frac{1}{e}$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

则 $x=\frac{1}{e}$ 时 $g(x)$ 取最大值 $g(\frac{1}{e})=e$，

所以 $2m\geqslant e$，即 $m\geqslant\frac{e}{2}$，所以 m 的取值范围是 $[\frac{e}{2},+\infty)$.

（2）证明：因为 $f'(x)=lnx-2mx+2(x>0)$ 有两个零点 a，b，

令 $\varphi(x)=f'(x)=lnx-2mx+2(x>0)$，则 $\varphi'(x)=\frac{1}{x}-2m$，

当 $m\leqslant 0$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，不符合题意，

当 $m>0$ 时，由 $\varphi'(x)=\frac{1}{x}-2m=0$ 可得 $x=\frac{1}{2m}$，

当 $0<x<\frac{1}{2m}$ 时，$\varphi'(x)>0$，函数 $\varphi(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2m})$ 上单调递增，

当 $x>\frac{1}{2m}$ 时，$\varphi'(x)<0$，函数 $\varphi(x)$ 在 $(\frac{1}{2m},+\infty)$ 上单调递减，

由可知 $m>0$，$f'(\frac{1}{2m})=-ln2m+1>0$，

要证明 $ab^2>\frac{32}{e^6}$，只需证明 $lna+2lnb>5ln2-6$．

由已知可得 $\begin{cases}lna-2ma+2=0\\lnb-2mb+2=0\end{cases}$，化简得 $\begin{cases}lna=2ma-2\\lnb=2mb-2\end{cases}$，

所以 $2m=\frac{lna-lnb}{a-b}$，

$$lna+2lnb=2m(a+2b)-6=\frac{lna-lnb}{a-b}(a+2b)-6=\frac{ln\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}-1}(\frac{a}{b}+2)-6.$$

令 $t=\frac{a}{b}$，则 $t\in(0,\frac{1}{2})$，要证明 $lna+2lnb>5ln2-6$，只需证明 $\frac{lnt}{t-1}(t+2)>5ln2$．

令 $h(t)=\frac{lnt}{t-1}(t+2)$，且 $t\in(0,\frac{1}{2})$，则 $h'(t)=\frac{t-3lnt-\frac{2}{t}+1}{(t-1)^2}$，

令 $u(t)=t-3lnt-\frac{2}{t}+1$，且 $t\in(0,\frac{1}{2})$，则 $u'(t)=1-\frac{3}{t}+\frac{2}{t^2}=\frac{(t-1)(t-2)}{t^2}>0$，

则 $u(t)$ 在 $t\in(0,\frac{1}{2})$ 时单调递增，故 $u(t)<u(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+3ln2-3<0$，

故 $h'(t)<0$，则 $h(t)$ 在 $t\in(0,\frac{1}{2})$ 时单调递减，

所以 $h(t)>h(\frac{1}{2})=5ln2$，即 $\frac{lnt}{t-1}(t+2)>5ln2$，则有 $lna+2lnb>5ln2-6$，

所以 $ab^2>\frac{32}{e^6}$，即原不等式成立．

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。