2022～2023 学年度皖北县中联盟 5 月联考·高三数学

参考答案、提示及评分细则

1. A　$\dfrac{z}{1+2\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$，$z=(1+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=3+\mathrm{i}$，则$\bar{z}=3-\mathrm{i}$，所以$\bar{z}$的虚部为$-1$，故选 A.

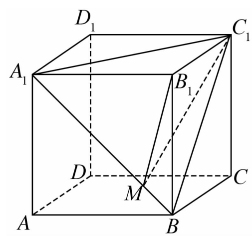
2. B　由题知，$N=\{x\mid \log_4|x|\leqslant\dfrac{1}{2}\}\Rightarrow 0<|x|\leqslant 2\Rightarrow -2\leqslant x\leqslant 2$ 且 $x\neq 0$，又 $M=\{x\mid -3<x\leqslant 1\}$，则 $M\cap N=\{x\mid -2\leqslant x<0$ 或 $0<x\leqslant 1\}$，故选 B.

3. A　4 个男生和 2 个女生随机排成一行，可利用插空法，先排 4 个男生有 A_4^4 种排法，4 个男生产生 5 个空，将 2 个女生插入 5 个空中；有 A_5^2 种排法，6 名学生共有 A_6^6 种排法，所以 2 个女生不相邻的概率为 $P=\dfrac{\mathrm{A}_4^4\mathrm{A}_5^2}{\mathrm{A}_6^6}=\dfrac{2}{3}$. 故选 A.

4. C　$\because |\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量是$\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}$，$\therefore |\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=(\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)\boldsymbol{a}=(\dfrac{1}{2}\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}$，则$\dfrac{1}{2}\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{1}{4}$，即 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{1}{2}$，且$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，则$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{3}$，故选 C.

5. B　由题意知，从点 $E(-4,0)$出发的光线与圆 C 相离时，光线不被挡住. 设过点 $E(-4,0)$与圆 C 相切的直线方程为 $l:y=k(x+4)$，即 $kx-y+4k=0$，又圆 $C:x^2+y^2=4$，所以圆心 $C(0,0)$到 l 的距离 $d=\dfrac{|4k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=2$，解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故 $l:y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+4)$，令 $x=3$，$y=\pm\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$，即 $m>\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$或 $m<-\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.

6. D　因为$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{AA_1}$，所以 A_1,M,B 三点共线，连接 C_1B,A_1C_1,B_1M，因为 $C_1B_1\perp$平面 AA_1B，所以直线 C_1M 与平面 AA_1B 所成角为$\angle C_1MB_1$，其正弦值为$\dfrac{C_1B_1}{C_1M}$，$C_1B=A_1C_1=A_1B=\sqrt{2}C_1B_1$，当 $C_1M\perp A_1B$ 时，$C_1M=\dfrac{\sqrt{3}}{2}C_1B=\dfrac{\sqrt{6}}{2}C_1B_1$，所以$\dfrac{\sqrt{6}}{2}C_1B_1\leqslant C_1M\leqslant\sqrt{2}C_1B_1$，则$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\dfrac{C_1B_1}{C_1M}\leqslant\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，所以直线 C_1M 与平面 AA_1B 所成角的正弦值的取值范围是$[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{3}]$. 故选 D.



7. D　由题意：$\dfrac{f'(x)}{f(x)}<\dfrac{g'(x)}{g(x)}\Rightarrow f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，

设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，则 $F'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$，由 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$ 得 $F'(x)<0$，因为 $x_1<x<x_2$，所以$\dfrac{f(x_2)}{g(x_2)}<\dfrac{f(x)}{g(x)}<\dfrac{f(x_1)}{g(x_1)}$，又 $f(x)$、$g(x)$是定义域为 $\mathbf{R}$ 的恒大于 0 的可导函数，故 $f(x)g(x_1)<f(x_1)g(x)$，B 错误，$f(x_2)g(x_1)<f(x_1)g(x_2)$，A 错误；

$\dfrac{f(x_2)}{g(x_2)}<\dfrac{f(x_1)}{g(x_1)}\Rightarrow\dfrac{f(x_2)}{g(x_2)}-1<\dfrac{f(x_1)}{g(x_1)}-1\Rightarrow\dfrac{f(x_2)-g(x_2)}{g(x_2)}<\dfrac{f(x_1)-g(x_1)}{g(x_1)}$，

因为 $f(x_2)-g(x_2)$，$f(x_1)-g(x_1)$不知道正负，所以 C 不一定成立；

$\dfrac{f(x_2)}{g(x_2)}<\dfrac{f(x_1)}{g(x_1)}\Rightarrow\dfrac{g(x_1)}{g(x_2)}<\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}\Rightarrow\dfrac{g(x_2)+g(x_1)}{g(x_2)}<\dfrac{f(x_2)+f(x_1)}{f(x_2)}$，即$\dfrac{f(x_2)}{g(x_2)}<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{g(x_1)+g(x_2)}$，D 正确.

8. C　令 $f(x)=(\dfrac{2}{10})^x+(\dfrac{8}{10})^x$，$f(1)=1$，$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，$t>1$ 时，$(\dfrac{2}{10})^t+(\dfrac{8}{10})^t<1$，

$\therefore 2^t+8^t<10^t$，即 $m<t$，$\therefore 10^t-2^t>8^t$，$\therefore n>t$，即 $n>t>m$，$\therefore n-t<n-m$，排除 AB.

$t=2$ 时，$m=\lg 68$，$n=\log_8 96$，$n-t=\log_8 96-2=\log_8\dfrac{3}{2}=\dfrac{\lg\dfrac{3}{2}}{\lg 8}$，$t-m=2-\lg 68=\lg\dfrac{25}{17}=\dfrac{\lg\dfrac{25}{17}}{\lg 10}$，

显然 $\lg\dfrac{3}{2}>\lg\dfrac{25}{17}>0$，$0<\lg 8<\lg 10$，所以 $n-t>t-m$，选 C，$0<t<1$ 时可得相同结论，$t=1$ 时取“$=$”.

9. AB　由已知函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，在$(-\infty,0)$上也单调递增，$f(0)=0$，

由 $f(-1)=f(3)=2$，得 $f(1)=f(-3)=-2$.

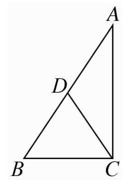
对于 A，因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，所以 $f(-2)>f(-3)=-2$，A 正确；

对于 B，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(1)=-2$，$f(3)=2$，故在 $(0,+\infty)$ 上有且只有一个 $x_0\in(1,3)$，使 $f(x_0)=0$，同理 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，且 $f(-1)=2$，$f(-3)=-2$，故在 $(-\infty,0)$ 上有且只有一个 $x_1\in(-3,-1)$，使 $f(x_1)=0$，又 $f(0)=0$，所以 $f(x)$ 有 3 个零点，B 正确；

对于 C，因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(2)>f(1)=-2$，C 错误；

对于 D，$f(5)>f(3)=2$，$f(-\frac{1}{2})>f(-1)=2$，易知 $f(5)$ 与 $f(-\frac{1}{2})$ 无法比较大小，D 不一定正确. 故选 AB.

10. BCD　如图，在边 AB 上取一点 D，使 $DB=DC$.



设 $DB=DC=x$，则 $\angle B=\angle DCB$，$\therefore \angle ACD=\angle ACB-\angle B$.

$\cos\angle ACD=\frac{x^2+9-(4-x)^2}{6x}=\frac{3}{4}$，解得 $x=2$，$\therefore AD=BD=DC=2$.

在 $\triangle ADC$ 中，$\cos\angle ADC=\frac{4+4-9}{2\times2\times2}=-\frac{1}{8}$，

$\therefore \cos\angle BDC=\frac{1}{8}=\frac{4+4-BC^2}{8}$，解得 $BC=\sqrt{7}$，$\therefore BC^2+AC^2=AB^2$，$\therefore\triangle ABC$ 为直角三角形，B 错误.

CD 为斜边 AB 上的中线，所以 A 正确；$\cos B=\frac{\sqrt{7}}{4}$，C 错误；$\triangle ABC$ 的周长为 $7+\sqrt{7}$，D 错误. 故选 BCD.

11. ABD　对于 A，由椭圆的定义知，四边形 AF_1BF_2 的周长为 $2a+2a=4a=16$，A 正确；

对于 B，设 $A(x_1,y_1)$，则 $B(-x_1,-y_1)$，又 $M(0,3)$，所以 $k_{MA}\cdot k_{MB}=\frac{y_1-3}{x_1}\cdot\frac{-y_1-3}{-x_1}=\frac{y_1^2-9}{x_1^2}$.

因为点 $A(x_1,y_1)$ 在椭圆上，所以 $\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{9}=1$，即 $x_1^2=16(1-\frac{y_1^2}{9})=\frac{16}{9}(9-y_1^2)$，

所以 $k_{MA}\cdot k_{MB}=\frac{y_1^2-9}{x_1^2}=-\frac{9}{16}$，B 正确；

对于 C，$\frac{1}{|AF_1|}+\frac{4}{|BF_1|}=\frac{1}{|AF_1|}+\frac{4}{|AF_2|}=\frac{1}{8}(\frac{1}{|AF_1|}+\frac{4}{|AF_2|})(|AF_1|+|AF_2|)=\frac{1}{8}(1+4+\frac{|AF_2|}{|AF_1|}+\frac{4|AF_1|}{|AF_2|})\geqslant\frac{9}{8}$，当且仅当 $|AF_1|=\frac{8}{3}$，$|AF_2|=\frac{16}{3}$ 时等号成立，故 C 错误；

对于 D，设 $C(t,0)(-\sqrt{7}<t<\sqrt{7})$，则 $\frac{|F_1C|}{|F_2C|}=\frac{t+\sqrt{7}}{\sqrt{7}-t}=\frac{|AF_1|}{|AF_2|}$，$|AF_1|+|AF_2|=8$，

所以 $|AF_1|=4(\frac{\sqrt{7}}{7}t+1)$，$|AF_2|=4(1-\frac{\sqrt{7}}{7}t)$，

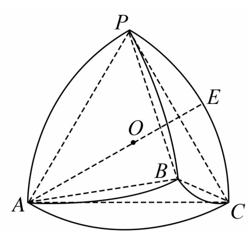
在椭圆 C：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 中，由其第二定义 $e=\frac{|AF_1|}{d}$（d 指的是椭圆上的点到相应的准线的距离）得 $|AF_1|=de=(x_1+\frac{a^2}{c})\cdot e=\frac{\sqrt{7}}{4}x_1+4$，

$\therefore |AF_1|=4+\frac{\sqrt{7}}{4}x_1=4(\frac{\sqrt{7}}{7}t+1)$，所以 $x_1=\frac{16t}{7}$，故 $A(\frac{16t}{7},y_1)$，$C(t,0)$，$D(0,-\frac{1}{2})$，

因为三点共线，所以 $\frac{y_1}{\frac{16t}{7}-t}=\frac{\frac{1}{2}}{t}\Rightarrow y_1=\frac{9}{14}$，故 D 正确. 故选 ABD.

12. AB　对于 A，勒洛四面体能在两个平行平面间自由转动，并且始终保持与两平面都接触，所以其表面上任意两点间距离的最大值即为其内接四面体 $PABC$ 的棱长 1. 所以 A 对；

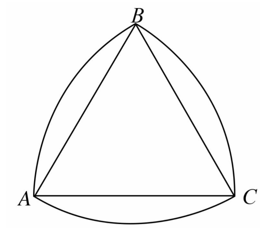
对于 B，勒洛四面体的内切球与勒洛四面体的弧面相切，如图，其中点 E 为该球与勒洛四面体的一个切点，O 为该球的球心，易知该球的球心 O 为正四面体 $PABC$ 的中心，半径为 OE，连接 AE，



易知 A、O、E 三点共线，且 $AE=1$，$OA=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

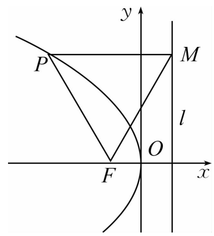
因此 $OE=1-\frac{\sqrt{6}}{4}$，内切球的表面积为 $4\pi R^2=\frac{(11-4\sqrt{6})\pi}{2}$，故 B 正确；

对于 C,截面如图所示,为三个半径为 1,圆心角为60°的扇形面积减去两个边长为 1 的正三角形的面积,$3\times\frac{60^\circ}{360^\circ}\times\pi-2\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$,C 错误;



对于 D,勒洛四面体的体积介于正四面体 $PABC$ 的体积和正四面体 $PABC$ 的外接球的体积之间,正四面体 $PABC$ 的体积 $V_1=\frac{\sqrt{2}}{12}$,其外接球的体积 $V_2=\frac{\sqrt{6}\pi}{8}$,故 D 错误.

13. 100　n 近似服从正态分布 $N(50,\sigma^2)$,故 $P(x>80)=P(x<20)=1-P(X\geqslant 20)=0.10$,$P(20\leqslant x\leqslant 80)=1-P(x<20)-P(x>80)=0.8$,估计小明一共统计的天数为$\frac{80}{0.8}=100$.



14. $2\sqrt{21}$　由题意曲线 C 为抛物线 $y^2=-8x$,不妨设点 P 在第二象限,由抛物线定义可得$|PF|=|PM|$,又$|PF|=|MF|$,所以$\triangle PMF$ 是等边三角形. 所以$\angle MFO=60^\circ$,则 $|PM|=|MF|=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$,则 $x_P=-6$,$y_P=\sqrt{6\times 8}=4\sqrt{3}$,则 $|OP|=\sqrt{36+48}=2\sqrt{21}$.

15. 4　由题意可知,需要使(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)变成绿色,其他点都是红色,第一步:(0,3)变成绿色,则(0,2),(1,3)也变成绿色;第二步:(1,2)变成绿色,则(0,2),(1,3)变成红色,(1,1),(2,2)变成绿色;第三步:(2,1)变成绿色,则(1,1),(2,2)变成红色,(2,0),(3,1)变成绿色;第四步:(3,0)变成绿色,则(2,0),(3,1)变成红色.

16. $[-\frac{11}{10},-\frac{13}{12}]$　由题意可得 $c_1+3c_2+\cdots+3^{n-2}c_{n-1}+3^{n-1}c_n=\frac{n}{2}\cdot 3^n$,

$\therefore n\geqslant 2$ 时,$c_1+3c_2+\cdots+3^{n-2}c_{n-1}=\frac{n-1}{2}\cdot 3^{n-1}$,

两式相减可得:$3^{n-1}c_n=\frac{n}{2}\cdot 3^n-\frac{n-1}{2}\cdot 3^{n-1}$,化为 $c_n=n+\frac{1}{2}$.

$n=1$ 时,$c_1=\frac{3}{2}$,满足上式,

故 $c_n=n+\frac{1}{2}$,$n\in\mathbf{N}^*$,故 $H_n=c_1+c_2+\cdots+c_n+p(1+2+\cdots+n)=\frac{n(\frac{3}{2}+n+\frac{1}{2})}{2}+p\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+2)}{2}+p\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n^2\cdot\frac{1+p}{2}+n\cdot\frac{2+p}{2}$,

$\because H_n\leqslant H_5$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立,

$\therefore\begin{cases}H_4\leqslant H_5\\H_6\leqslant H_5\end{cases}$,即$\begin{cases}12+10p\leqslant\frac{35}{2}+15p\\24+21p\leqslant\frac{35}{2}+15p\end{cases}$,解得$-\frac{11}{10}\leqslant p\leqslant-\frac{13}{12}$,即 $p\in[-\frac{11}{10},-\frac{13}{12}]$.

17. 解:(1)$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\cos(\omega x+\varphi)-\sqrt{3}\cos^2(\omega x+\varphi)+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sin(2\omega x+2\varphi)-\frac{\sqrt{3}}{2}[2\cos^2(\omega x+\varphi)-1]$

$=\frac{1}{2}\sin(2\omega x+2\varphi)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2\omega x+2\varphi)=\sin(2\omega x+2\varphi-\frac{\pi}{3})$, ………………………………………… 2 分

因为函数 $f(x)$图象的相邻两对称轴间的距离为$\frac{\pi}{2}$,所以 $T=\pi$,可得 $\omega=1$. ………………………………… 3 分

又因为函数 $f(x)=\sin(2x+2\varphi-\frac{\pi}{3})$为奇函数,

所以 $f(0)=\sin(2\varphi-\frac{\pi}{3})=0$,则 $2\varphi-\frac{\pi}{3}=k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得 $\varphi=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$.

由 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ 得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$. …………………………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)知,$2\omega f(x+\frac{\varphi}{2})=m\Rightarrow 2\sin(2x+\frac{\pi}{6})=m$,即 $\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\frac{m}{2}$.

因为 $x\in[-\frac{\pi}{12},\pi]$,可得 $2x+\frac{\pi}{6}\in[0,\frac{13\pi}{6}]$,

结合正弦函数图象知，$\frac{m}{2}\in[0,\frac{1}{2}]$，即 $m\in[0,1]$. ……………………………………………………… 7 分

且 $2x_2+\frac{\pi}{6}+2x_3+\frac{\pi}{6}=3\pi$，$2x_3+\frac{\pi}{6}-(2x_1+\frac{\pi}{6})=2\pi$，则 $x_2+x_3=\frac{4\pi}{3}$，$x_3-x_1=\pi$， ……………… 9 分

故 $m\cdot\frac{x_2+x_3}{x_1-x_3}\in[-\frac{4}{3},0]$. ……………………………………………………………………… 10 分

18.(1)证明：$\because a_n-a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_{n+1}-3)(a_n-3)$，

$\therefore 2a_n-2a_{n+1}=(a_{n+1}-3)(a_n-3)\Rightarrow 2(a_n-3)-2(a_{n+1}-3)=(a_{n+1}-3)(a_n-3)$，……………… 2 分

$\therefore \frac{2}{a_{n+1}-3}-\frac{2}{a_n-3}=1(a_n\neq 3)$，$\frac{2}{a_1-3}=2$. ………………………………………………… 4 分

$\therefore\{\frac{2}{a_n-3}\}$是首项为 2，公差为 1 的等差数列. ………………………………………………………… 6 分

(2)解：因为$\frac{2}{a_n-3}=2+n-1=n+1$， …………………………………………………………………… 7 分

所以 $a_n-3=\frac{2}{n+1}$，$a_{n+1}-3=\frac{2}{n+2}$，

所以 $b_n=(a_n-3)(a_{n+1}-3)=\frac{2}{n+1}\cdot\frac{2}{n+2}=4(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$，……………………………………… 9 分

$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=4\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+4\times(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+4(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})=4\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2})=\frac{2n}{n+2}$.

…… 12 分

19.解：(1)由题意可知 $P-ABC$ 为一个三棱锥，且 $PA=PB=PC$，

因为 $BC=2$，$EF=1$，所以 D、E、F 分别为 PA、PB、PC 的中点，且 $AB=2DE=2\sqrt{5}$.

取 AB 的中点 M，连接 PM、CM，则 $PM\perp AB$.

因为 $AC=4$，$BC=2$，$AB=2\sqrt{5}$，

所以 $AC^2+BC^2=AB^2$，所以 $CA\perp CB$. ………………………………………………………………… 2 分

$\therefore AM=CM=\sqrt{5}$，则$\triangle PAM\cong\triangle PCM$，故$\angle PMA=\angle PMC=90^\circ$，

即 $PM\perp MC$. ……………………………………………………………………………………………… 3 分

因为 $PM\perp AB$，$AB\cap MC=M$，AB，$MC\subset$平面 ABC，

所以 $PM\perp$平面 ABC. …………………………………………………………………………………… 4 分

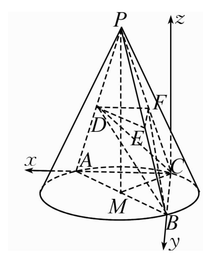
又 $PM\subset$平面 ABD，故平面 $ABD\perp$平面 ABC. ……………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $V_{F-BCD}=\frac{1}{2}V_{D-BCP}=\frac{1}{4}V_{A-BCP}=\frac{1}{4}V_{P-ABC}=2$，所以 $V_{P-ABC}=8$. ………………………………… 6 分

而 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$，

所以 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times PM=\frac{1}{3}\times 4\times PM=8$，解得 $PM=6$. ……………………………… 7 分

以 C 为坐标原点，CA、CB 所在直线分别为 x 轴，y 轴，过点 C 且垂直于平面 ABC 的直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(4,0,0)$，$P(2,1,6)$，$B(0,2,0)$，$D(3,\frac{1}{2},3)$，$F(1,\frac{1}{2},3)$. ……………………… 8 分

设 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$为平面 EBD 的一个法向量，

因为$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-4,2,0)\\\overrightarrow{AP}=(-2,1,6)\end{cases}$，所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=-4x+2y=0\\\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AP}=-2x+y+6z=0\end{cases}$，

不妨设 $x=1$，则平面 EBD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1=(1,2,0)$.

同理可求得平面 BDF 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_2=(0,2,1)$. ……………………………………… 10 分

所以$|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{0+4+0}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$， ……………………………… 11 分

所以平面 EBD 与平面 BDF 夹角的正切值为$\frac{3}{4}$. ………………………………………………………… 12 分

20.解：(1)由题意知，每辆汽车第一轮质量检测被列为不合格汽车的概率为 $C_3^2p^2(1-p)+C_3^3p^3$， ……… 1 分

每辆汽车重新检测被列为不合格汽车的概率为 $C_3^1p(1-p)^2[1-(1-p)^2]$，…………………………… 3 分

综上可知，每辆汽车被列为不合格汽车的概率为 $q=C_3^2p^2(1-p)+C_3^3p^3+C_3^1p(1-p)^2[1-(1-p)^2]=-3p^5+12p^4-17p^3+9p^2$. …………………………… 5 分

(2)设每辆汽车质量检测的费用为 X 元，则 X 的可能取值为 60，100，

由题意知 $P(X=100)=C_3^1p(1-p)^2$，$P(X=60)=1-C_3^1p(1-p)^2$，…………………………… 7 分

所以随机变量 X 的数学期望为

$E(X)=60\times[1-C_3^1p(1-p)^2]+100\times C_3^1p(1-p)^2=60+120p(1-p)^2$(元)，$p\in(0,1)$，…………… 8 分

令 $f(x)=60+120x(1-x)^2$，$x\in(0,1)$，

则 $f'(x)=120[(1-x)^2-2x(1-x)]=120(3x-1)(x-1)$，

所以当 $0<x<\frac{1}{3}$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(\frac{1}{3},1)$ 时，$f'(x)<0$；

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{3})$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{3},1)$ 上单调递减，

所以 $f(x)\leqslant f(\frac{1}{3})=60+120\times\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3})^2=\frac{700}{9}$，即 $E(X)\leqslant\frac{700}{9}$(元). …………………………… 10 分

所以此方案的最高费用为 $1+300\times\frac{700}{9}\times10^{-4}=\frac{10}{3}$(万元)，…………………………… 11 分

综上可知，实际费用估计不会超过预算. …………………………… 12 分

21. 解：(1) $f'(x)=e^{x-1}-2ax$，$f'(1)=1-2a$，…………………………… 1 分

$\because f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线与直线 $y=-\frac{1}{3}x+2$ 垂直，

$\therefore f'(1)=1-2a=3$，解得 $a=-1$，…………………………… 2 分

$\therefore f(x)=e^{x-1}+x^2$，$\therefore f(1)=2$，

故所求切线方程为 $y-2=3(x-1)$，即 $y=3x-1$. …………………………… 4 分

(2)由 $a>0$，$ax>0$，可知其定义域为 $(0,+\infty)$，令 $g(x)=0$，则 $e^{x-1}-ax^2+ax\ln(ax)=0$.

又 $ax>0$，所以 $\frac{e^{x-1}}{ax}-x+\ln(ax)=\frac{e^{x-1}}{e^{\ln(ax)}}-x+\ln(ax)=e^{x-\ln(ax)-1}-[x-\ln(ax)]=0$. …………… 6 分

令 $t=x-\ln(ax)$，即可转化为 $e^{t-1}-t=0$ 有解. …………………………… 7 分

设 $h(t)=e^{t-1}-t$，则由 $h'(t)=e^{t-1}-1<0$ 可得 $t<1$，

则 $h(t)$ 在 $t\in(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $t\in(1,+\infty)$ 上单调递增. …………………………… 8 分

又 $h(1)=0$，所以 $h(t)=e^{t-1}-t$ 有唯一的零点 $t=1$. …………………………… 9 分

若 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在零点，

则 $1=x-\ln(ax)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，整理得 $1+\ln a=x-\ln x$. …………………………… 10 分

设 $l(x)=x-\ln x$，

由 $l'(x)=1-\frac{1}{x}$，知 $l(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 上单调递减，在 $x\in(1,+\infty)$ 上单调递增，

又当 $x\to0^+$ 时，$l(x)\to+\infty$，则 $l(x)\geqslant l(1)=1$，

所以 $1+\ln a\geqslant1$，得 $a\geqslant1$，

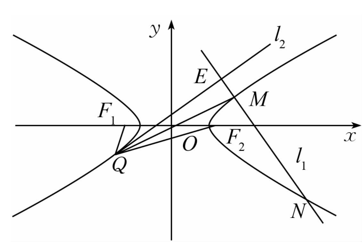
故实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$. …………………………… 12 分

22. 解：(1)因为虚轴长为 2，即 $2b=2$，所以 $b=1$.

焦距为 4，所以 $2c=4\Rightarrow c=2$，$a^2=c^2-b^2=3$，

所以双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$. …………………………… 3 分

(2)如图，由题意知点 Q 在双曲线左支上，设 $M(x_0,y_0)$，则 $Q(-x_0,-y_0)$.



易知直线 l_2 的斜率存在，设直线 l_2 的斜率为 k，

记 $\boldsymbol{a}=(1,k)$，又 l_2 为 $\angle F_1QF_2$ 的平分线，则 $\frac{\overrightarrow{QF_1}\cdot\boldsymbol{a}}{|\overrightarrow{QF_1}|}=\frac{\overrightarrow{QF_2}\cdot\boldsymbol{a}}{|\overrightarrow{QF_2}|}$.

因为 $\frac{x_0^2}{3}-y_0^2=1$，$x_0\geqslant\sqrt{3}$，

所以$|\overrightarrow{QF_1}|=\sqrt{(-2+x_0)^2+y_0^2}=\sqrt{(-2+x_0)^2+\frac{x_0^2}{3}-1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}x_0-\sqrt{3}$，

同理$|\overrightarrow{QF_2}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}x_0+\sqrt{3}$，

又$\overrightarrow{QF_1}=(x_0-2,y_0)$，$\overrightarrow{QF_2}=(x_0+2,y_0)$，

代入$\frac{\overrightarrow{QF_1}\cdot\boldsymbol{a}}{|\overrightarrow{QF_1}|}=\frac{\overrightarrow{QF_2}\cdot\boldsymbol{a}}{|\overrightarrow{QF_2}|}$，得$\frac{(x_0-2,y_0)\cdot(1,k)}{\frac{2\sqrt{3}}{3}x_0-\sqrt{3}}=\frac{(x_0+2,y_0)\cdot(1,k)}{\frac{2\sqrt{3}}{3}x_0+\sqrt{3}}$，

化简得 $x_0=3ky_0$. …………………………………………………………………………………………………… 6 分

又 $x_0>0,y_0>0$，所以 $k>0$，

将 $x_0=3ky_0$ 代入$\frac{x_0^2}{3}-y_0^2=1$，$x_0\geqslant\sqrt{3}$，得 $x_0=\frac{3k}{\sqrt{3k^2-1}}$，$y_0=\frac{1}{\sqrt{3k^2-1}}$，

所以 $M(\frac{3k}{\sqrt{3k^2-1}},\frac{1}{\sqrt{3k^2-1}})$，$Q(-\frac{3k}{\sqrt{3k^2-1}},-\frac{1}{\sqrt{3k^2-1}})$，$k>\frac{\sqrt{3}}{3}$. …………………………………………… 7 分

设直线 l_2 的方程为 $y=kx+t$，

将 $Q(-\frac{3k}{\sqrt{3k^2-1}},-\frac{1}{\sqrt{3k^2-1}})$代入得 $t=\sqrt{3k^2-1}$，

所以直线 l_2 的方程为 $y=kx+\sqrt{3k^2-1}$，$k>\frac{\sqrt{3}}{3}$， …………………………………………………………… 8 分

由点到直线的距离公式得

$|ME|=\frac{|\frac{3k^2-1}{\sqrt{3k^2-1}}+\sqrt{3k^2-1}|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{2\sqrt{3k^2-1}}{\sqrt{k^2+1}}$，…………………………………………………………………… 9 分

又直线 MN 的斜率为$-\frac{1}{k}$，设直线 MN 的方程为 $x=-ky+t'$，

将 $M(\frac{3k}{\sqrt{3k^2-1}},\frac{1}{\sqrt{3k^2-1}})$代入得 $t'=\frac{4k}{\sqrt{3k^2-1}}$，

所以直线 MN 的方程为 $x=-ky+\frac{4k}{\sqrt{3k^2-1}}$，

将其与$\frac{x^2}{3}-y^2=1(x>0)$联立得$(k^2-3)y^2-\frac{8k^2}{\sqrt{3k^2-1}}y+\frac{7k^2+3}{3k^2-1}=0$. ………………………………………… 10 分

设 $N(x_1,y_1)$，

则 $y_0+y_1=\frac{8k^2}{(k^2-3)\sqrt{3k^2-1}}$，$y_0y_1=\frac{7k^2+3}{(k^2-3)(3k^2-1)}$.

由 $y_0y_1<0$ 得 $k^2\in(\frac{1}{3},3)$，

$|MN|=\sqrt{1+k^2}\,|y_0-y_1|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(y_0+y_1)^2-4y_0y_1}=\frac{6(k^2+1)^{\frac{3}{2}}}{(3-k^2)\sqrt{3k^2-1}}$.

故$\frac{|MN|}{|ME|}=\frac{3(k^2+1)^2}{(3-k^2)(3k^2-1)}\geqslant\frac{3(k^2+1)^2}{(k^2+1)^2}=3$，

当且仅当 $3-k^2=3k^2-1$，即 $k^2=1$ 时，等号成立，

所以$\frac{|ME|}{|NE|}=\frac{|ME|}{|ME|+|MN|}=\frac{1}{\frac{|MN|}{|ME|}+1}\leqslant\frac{1}{4}$，当且仅当 $k=1$ 时，等号成立，即$\frac{|ME|}{|NE|}$的最大值为$\frac{1}{4}$.

…… 12 分