① 若已知 $f(x)=0$ 的三个根为 x_1，x_2，x_3，则可设 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

② 若已知 $f(x)=0$ 的两个根为 x_1，x_2，则可设 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x+m)$

③ 若已知 $f(x)=0$ 的一个根为 x_1，则可设 $f(x)=a(x-x_1)(x^2+mx+n)$

72、三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$（$a\neq 0$）有极值的充要条件是

$f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$ 有两个不相等的实数根

73、基本（均值）不等式：一正二定三相等，积定和最小，和定积最大

利用 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 或 $\dfrac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$（一正二定三相等）等公式来求值域或最值，一定要看等号能否成立，否则利用数形结合法、单调性法完成；

74、集中分时函数求最值的方法：

① $y=\dfrac{mx+n}{(ax+b)^2}$（令 $t=\dfrac{1}{ax+b}$ 倒数换元法）

② $y=\dfrac{\sqrt{mx+n}}{ax+b}$（令 $t=\sqrt{mx+n}$）

③ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ 或 $y=\dfrac{mx+n}{ax^2+bx+c}$（令 $t=mx+n$）

75、图像变换：

（1）平移变换：设函数 $y=f(x)$，其他参数均为正数

① $f(x)\to f(x+a)$：$f(x)$ 的图象向左平移 a 个单位

② $f(x)\to f(x-a)$：$f(x)$ 的图象向右平移 a 个单位

③ $f(x)\to f(x)+b$：$f(x)$ 的图象向上平移 b 个单位

④ $f(x)\to f(x)-b$：$f(x)$ 的图象向下平移 b 个单位

（2）伸缩变换：设函数 $y=f(x)$，其他参数均为正数

① $f(x)\to f(kx)$：$f(x)$ 的图象纵坐标不变，横坐标变为原来的 $\dfrac{1}{k}$ 倍（$k>1$，伸缩；$0<k<1$，拉伸）

② $f(x)\to kf(x)$：$f(x)$ 的图象横坐标不变，纵坐标变为原来的 k 倍（$k>1$，拉伸；$0<k<1$，收缩）

（3）翻折变换：

① $f(x)\to|f(x)|$：x 轴上方的图象不变，下方的图象沿 x 轴对称的翻上去

② $f(x)\to f(|x|)$：x 轴正半轴的图象不变，x 轴负半轴的图象去掉，再换上 x 轴正半轴的图象关于 y 轴对称的图象，最后构成偶函数.

（4）对称变换：

① $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的图象关于 x 轴对称

② $f(x)$ 与 $-f(x)$ 的图象关于 y 轴对称

③ $f(x)$ 与 $-f(-x)$ 的图象关于原点对称

④ $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称

⑤ $f(x)$ 与 $-f^{-1}(-x)$ 的图象关于直线 $y=-x$ 对称

76、全称命题的否定：$p:\forall x\in M, p(x)\to\neg p:\exists x\in M,\neg p(x)$

77、特称命题的否定：$p:\exists x\in M, p(x)\to\neg p:\forall x\in M,\neg p(x)$

78、单调性定义的变式如下：设 x_1， $x_2\in[a,b]$ 那么

$$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0\Leftrightarrow\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\Leftrightarrow f(x)\text{在}[a,b]\text{上是增函数}$$

$$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0\Leftrightarrow\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0\Leftrightarrow f(x)\text{在}[a,b]\text{上是减函数}$$

79、奇偶性定义的变式如下：$\forall x\in D$，且 $-x\in D$，那么

$$f(-x)+f(x)=0\Leftrightarrow\frac{f(-x)}{f(x)}=-1\Leftrightarrow f(x)\text{为奇函数}$$

$$f(-x)-f(x)=0\Leftrightarrow\frac{f(-x)}{f(x)}=1\Leftrightarrow f(x)\text{为偶函数}$$

80、周期型

$f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}$，则 $f(x)$ 的周期是 $T=2a$；

$f(x+a)=-\dfrac{1}{f(x)}$，则 $f(x)$ 的周期是 $T=2a$；

$f(x+a)=\dfrac{\lambda}{f(x)}$，则 $f(x)$ 的周期是 $T=2a$；

$f(x+a)=\dfrac{1}{1-f(x)}$，则 $f(x)$ 的周期是 $T=3a$；

$f(x+a)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$，则 $f(x)$ 的周期是 $T=4a$；

$f(x+2a)=\dfrac{1+f(x+a)}{f(x)}$，则 $f(x)$ 的周期是 $T=5a$；

$f(x+2a)=f(x+a)-f(x)$，则 $f(x)$ 的周期是 $T=6a$；

81、设函数 $f(x)=\log_m(ax^2+bx+c)$，记 $\Delta=b^2-4ac$

①若 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，即 $ax^2+bx+c>0$ 恒成立，则 $\begin{cases}a=b=0\\c>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a>0\\\Delta<0\end{cases}$；

③ 若 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，即 ax^2+bx+c 能取遍一切正实数，则 $\begin{cases}a=0\\b\neq 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a>0\\\Delta\geq 0\end{cases}$；

82、熟悉符号 $[x]$ 的含义：$[x]=$ 不超过 x 的最大整数，如需讨论化简，分 $x\in[k,k+1)$，$k\in Z$ 情形进行；

83、$[0,+\infty)=[0,1)\cup[1,2)\cup[2,3)\cup\cdots\cup[k,k+1)\cup\cdots$；

$\cdots\cup\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right]\cup\cdots\cup\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right]=(0,1]$

84、过球心与截面圆心的直线垂直于该截面，且 $d^2=R^2-r^2$；

85、长（正）方体的对角线恰好为其外接球的直径；

86、三角形的重心坐标公式：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，则 ΔABC 的重心坐标为 $G\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

87、定比分点坐标公式：设 $P_1(x_1,y_1)$，$P(x,y)$，$P_2(x_2,y_2)$，若 $\overrightarrow{P_1P}=\overrightarrow{PP_2}$，则点 P 的坐标公式为：$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\end{cases}$ （$\lambda\neq -1$）

①三角形“五心”向量形式的充要条件：设 O 为△ ABC 所在平面上一点，角 A，B，C 所对边长分别为 a，b，c，则：

②O 为△ ABC 的外心 ⇔ $\dot{OA}^2=\dot{OB}^2=\dot{OC}^2$；

③O 为△ ABC 的重心 ⇔ $\dot{OA}+\dot{OB}+\dot{OC}=\dot{0}$；

④O 为△ ABC 的垂心 ⇔ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$；

⑤O为△ABC的内心$\Leftrightarrow$ $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$；

⑥O为△ABC的$\angle A$的旁心$\Leftrightarrow$ $a\dot{OA}=b\dot{OB}+c\dot{OC}$.

88、共线定理：

已知$\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}$（$\lambda$，$\mu$为常数），则$A$，$B$，$C$三点共线$\Leftrightarrow$ $\lambda+\mu=1$.

89、平面向量的基本定理：

如果$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内任一向量$\dot{a}$，

有且只有一对实数λ_1，λ_2使$\dot{a}=\lambda_1\dot{e_1}+\lambda_2\dot{e_2}$.（基底中一定不含零向量）

90、复数：

①定义：形如$z=a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$）其中a，b分别是它的实部和虚部.
当$b=0$时，$z=a$为实数；当$b\neq0$时，$z=a+bi$为虚数；当$a=0$，$b\neq0$时，$z=bi$为纯虚数.

②复数相等：$a+bi=c+di\Leftrightarrow a=c$，$b=d$（$a$，$b$，$c$，$d\in\mathbf{R}$）

③模：向量$\dot{OZ}$的模r叫做复数$z=a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$）的模（或绝对值），记作$|Z|$

或$|a+bi|$，由模的定义可知：则$|z|=|a+bi|=r=\sqrt{a^2+b^2}$（显然$r\geqslant0$，$r\in\mathbf{R}$）；

④复数的几何意义：复数$z=a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$）对应复平面上的点$Z(a,b)$，对应

的向量是$\dot{OZ}=(a,b)$

91、直线的斜率：

① 直线的倾斜角和斜率：$\alpha\in[0,\ \pi)$

② 当倾斜角$\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}$时，$k=\tan\alpha$；

③ 过两点的斜率：$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$（$x_1\neq x_2$），$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$.

92、直线方程的表达式：

①斜截式：$y=kx+b$

②点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$（$x\neq x_0$）

③两点式：$\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$（$x_1\neq x_2$）

④截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$的（$ab\neq0$）

⑤一般式：$Ax+By+C=0$（A、B不全为0）

93、两条直线平行或垂直的判定：

①斜截式形式：l_1：$y=k_1x+b_1$；l_2：$y=k_2x+b_2$，$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1=k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$；$l_1$和$l_2$相交$\Leftrightarrow k_1 \neq k_2$；$l_1$和$l_2$重合$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1=k_2 \\ b_1=b_2 \end{cases}$；$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1$.

②一般式形式：l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$；l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$，$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1B_2=A_2B_1 \\ B_1C_2 \neq B_2C_1 \end{cases}$；$l_1$和$l_2$相交$\Leftrightarrow A_1B_2 \neq A_2B_1$；$l_1$和$l_2$重合$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1B_2=A_2B_1 \\ B_1C_2=B_2C_1 \end{cases}$；④ $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$.

94、距离：

（1）两点的距离公式：设（$A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$）

$$\left|AB\right|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}；$$

（2）点到直线的距离：点$A\left(x_0,y_0\right)$到直线l：$Ax+By+C=0$的距离：

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$（点）；

（3）两平行线间的距离：设l_1：$Ax+By+C_1=0$；l_2：$Ax+By+C_2=0$（$C_1 \neq C_2$）

$$d=\frac{\left|C_1-C_2\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

95、圆的标准方程与一般方程：

（1）圆的标准方程：$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=r^2$；其中圆心$\left(a,b\right)$，半径：$r$；

（2）一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$（隐含条件：$D^2+E^2-4F \geq 0$）其中圆心$\left(-\frac{D}{2}，-\frac{E}{2}\right)$，半径：$r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$.

96、圆的弦长公式：$L=2\sqrt{r^2-d^2}$；弦心距：$d=\sqrt{r^2-\left(\frac{L}{2}\right)^2}$；

97、利用圆系方程求圆的方程：

① 经过圆C：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$与直线l：$ax+by+c=0$的两个交点的圆的方程可设为：$x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda\left(ax+by+c\right)=0$

② 经过圆 C_1： $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 与经过圆 C_2：

$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 与的两个交点的圆的方程可设为：

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda\left(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2\right)=0$$

③ 圆 C_1 的方程为： $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$

圆 C_2 的方程为： $x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$

两式相减：（根轴） $\left(D_1-D_2\right)x+\left(E_1-E_2\right)y+\left(F_1-F_2\right)=0$

98、算法案例：辗转相除法、更相减损术、秦九韶算法、进位制

99、线性规划问题中目标函数的常见类型梳理如下：

（1）截距型：

① $z=ax+by$；

② $z=ax+by+c$

③ $z=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=ax+by$ 其中 $P(a,b)$，$A(x,y)$

④ $z=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cos\angle AOP=\dfrac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 其中 $P(a,b)$，$A(x,y)$

⑤ $z=a|x|+by$（因去绝对值而增加约束条件，要分两种情形求解）

（2）斜率型：

① $z=\dfrac{y-b}{x-a}$

② $z=\dfrac{x-a}{y-b}$

④ $z=\dfrac{ay-b}{cx-d}$

⑤ $z=\dfrac{ax+by+c}{dx+e}$

⑥ $z=\dfrac{ay}{x}+\dfrac{bx}{y}$ （$=at+\dfrac{b}{t}$）（先求出 $t=\dfrac{y}{x}$ 的范围）

（3）距离型：

① $z=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$

② $z=(x-a)^2+(y-b)^2$

③ $z=\left|ax+by+c\right|=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\dfrac{\left|ax+by+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

④ $z=\left(ax-c\right)^2+\left(by-d\right)^2$，伸缩变换，令 $x'=ax$，$y'=by$，

则 $z=\left(x'-c\right)^2+\left(y'-d\right)^2$

（4）面积型：

① $z=xy$

② $z=\left(x-a\right)\left(y-b\right)$

100、　排列、组合与二项式定理

（1）伯努利-欧拉信封错排问题：n 封信与 n 个信封全部错位的放法数为 $f\left(n\right)$：

则 $f\left(2\right)=1$，$f\left(3\right)=2$，$f\left(4\right)=9$，$f\left(5\right)=44$，$f\left(6\right)=265$，$f\left(7\right)=1854$

通项公式：$a_n=n!\left[\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5!}+\cdots+\dfrac{\left(-1\right)^n}{n!}\right]$

（2）隔板法：方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$（n，$m\in\mathbf{N}^*$）的正整数解有 C_{m-1}^{n-1} 个；

非负整数解有 C_{n+m-1}^{n-1} 个

（3）n 个连续号码，出现两组 m 个连续号码的情形数为 $C_{n-2(m-1)}^{2}$，（掐头去尾，从中选号，两边连号）

（4）二项式定理：

①公式：$\left(a+b\right)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n$

②通项：$C_n^ra^{n-r}b^r$（$r=0$，1，2，…，n）叫做二项展开式的通项，用 T_{r+1} 表示．

③二项式系数：通项 $C_n^ra^{n-r}b^r$（$r=0$，1，2，…，n）的系数 C_n^r 叫做二项式系数，它仅与 n 有关，而与 a，b 无关．需区别于项的系数（除了 n 外还与 a，b 可能有关）．

④二项式系数最大的项：若 n 为偶数，二项式系数最大的项为中间一项 $T_{\frac{n}{2}+1}$ 的二项式系数 $\mathrm{C}_n^{\frac{n}{2}}$．若 n 为奇数，二项式系数最大的项为中间两项 $T_{\frac{n+1}{2}}$ 和 $T_{\frac{n+1}{2}+1}$ 的二项式系数 $\mathrm{C}_n^{\frac{n}{2}-1}$ 和 $\mathrm{C}_n^{\frac{n}{2}+1}$ 且 $\mathrm{C}_n^{\frac{n}{2}-1}=\mathrm{C}_n^{\frac{n}{2}+1}$．

⑤展开式的二项式系数之和为 2^n：$\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2^n$．

⑥二项式的奇数项的二项式系数之和等于偶数项的二项式系数之和．

$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = 2^{n-1}$.

⑦ 求$|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$的值：

方法一：先去绝对值；

方法二：利用$(|a|x + |b|)^n = |a_0| + |a_1|x + |a_2|x^2 + \cdots + |a_n|x^n$求解

⑧ 确定$\left(\sqrt{k^2+1}+k\right)^n$的整数部分、小数部分，常和$\left(\sqrt{k^2+1}-k\right)^n$对偶式联系起来；