2016 年北京大学自主招生数学试题 (回忆版)

兰琦

2017 年 1 月 4 日

一、选择题．在每小题的四个选项中，只有一项符合题目要求．

1. 已知 $\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}-\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=2\,(0<x<2\pi)$，则 x 的取值范围是 (　　)

A. $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$　　C. $\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$　　D. 前三个答案都不对

解析　B.

根据题意，有 $\sin x>0$，$\cos x<0$，于是 x 是第二象限的角．

2. $(2+1)\left(2^2+1\right)\left(2^3+1\right)\cdots\left(2^{2016}+1\right)$ 的个位数字是 (　　)

A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. 前三个答案都不对

解析　C.

因为 $2^2+1=5$，且对于任意正整数 k，都有 2^k+1 为奇数，所以

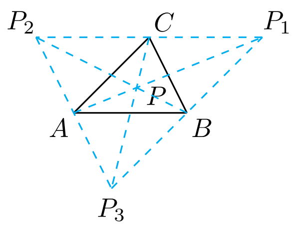
$$(2+1)\left(2^2+1\right)\left(2^3+1\right)\cdots\left(2^{2016}+1\right)\equiv 5 \pmod{10}.$$

3. 点 P 位于 $\triangle ABC$ 所在的平面内，使得 $\triangle PAB,\triangle PBC,\triangle PCA$ 的面积相等，则满足题意的点 P 有 (　　)

A. 1 个　　B. 3 个　　C. 5 个　　D. 前三个答案都不对

解析　D.

考虑到平面内使 $\triangle PAB$ 和 $\triangle PBC$ 的面积相等的点的轨迹为直线 BM 以及过点 B 且与 AC 平行的直线，其中 M 为边 AC 的中点，因此满足题意的点 P 有 4 个：$\triangle ABC$ 的重心，或者由 P,A,B,C 四点所构成的平行四边形的顶点．



4. 记 $f(n)$ 为最接近 $\sqrt{n}$ 的整数，其中 $n\in\mathbb{N}^*$．若 $\dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+\cdots+\dfrac{1}{f(m)}=2016$，则正整数 m 的值为 (　　)

A. 1015056　　B. 1017072　　C. 1019090　　D. 前三个答案都不对

解析　B.

若 $f(n)=k$ ，则

$$k^2-k+1\leqslant n\leqslant k^2+k,$$

所以

$$\begin{aligned}&f(1)=f(2)=1,\\&f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=2,\\&\cdots,\end{aligned}$$

进而有

$$2016=\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\cdots+\frac{1}{f(m)}=2\cdot 1+4\cdot\frac{1}{2}+6\cdot\frac{1}{3}+\cdots+2016\cdot\frac{1}{1008},$$

故 $m=2+4+6+\cdots+2016=1017072$.

5. 实数 x,y,z 满足 $x+y+z=2016$ ，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2016}$ ，则 $(x-2016)(y-2016)(z-2016)=$ (　　)

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. 前三个答案都不对

解析　A.

由于

$$\begin{aligned}(x-m)(y-m)(z-m)&=xyz-m(xy+yz+zx)+m^2(x+y+z)-m^3,\\&=mxyz\left[\frac{1}{m}-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right]+m^2\left[(x+y+z)-m\right],\end{aligned}$$

于是所求代数式的值为 0 .

6. 方程组 $\begin{cases}a^3-b^3-c^3=3abc,\\a^2=2(b+c)\end{cases}$ 的非负整数解有 (　　)

A. 1 组　　B. 4 组　　C. 5 组　　D. 前三个答案都不对

解析　B.

根据题意，有

$$\begin{aligned}a^3-b^3-c^3-3abc&=a^3-(b+c)^3+3bc(b+c-a)\\&=a^3-\frac{1}{8}a^6+3bc\left(\frac{1}{2}a^2-a\right),\\&=a\left(1-\frac{1}{2}a\right)\left[a^2\left(1+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a^2\right)-3bc\right]\\&=0,\end{aligned}$$

当 $a=0$ 时，$(b,c)=(0,0)$ ；当 $a=2$ 时，$(b,c)=(0,2),(1,1),(2,0)$. 当 $a\neq 0,2$ 时，有

$$a^2\left(1+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a^2\right)-3bc>\frac{1}{4}a^4-3bc=(b+c)^2-3bc\geqslant 0,$$

于是题中方程组的非负整数解共有 4 组.

7. 4 个半径为 1 的球两两外切，则这 4 个球的外切正四面体的棱长为（　　）

A. $2+2\sqrt{2}$　　B. $2+2\sqrt{3}$　　C. $2+2\sqrt{6}$　　D. 前三个答案都不对

解析　C.

棱长为 a 的正四面体的内切球半径为 $\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$．设 4 个半径为 1 的球的球心分别为 O_1,O_2,O_3,O_4，则正四面体 $O_1O_2O_3O_4$ 的棱长为 2，故其内切球半径为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$．设这 4 个球的外切正四面体为 $ABCD$，则正四面体 $ABCD$ 的内切球半径为 $1+\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，故正四面体 $ABCD$ 的棱长为 $2+2\sqrt{6}$．

8. 将 $1,2,\cdots,100$ 分成三组，使得第一组数的和为 102 的倍数，第二组数的和为 203 的倍数，第三组和为 304 的倍数．则不同的分法共有（　　）

A. 1 种　　B. 2 种　　C. 3 种　　D. 前三个答案都不对

解析　D．假设这样的分法存在，设三组数的和分别为 $102x,203y,304z$，$x,y,z\in\mathbb{N}^*$，则

$$102x+203y+304z=5050,$$

即

$$101(x+2y+3z)+(x+y+z)=101\cdot 50,$$

于是

$$101\mid x+y+z,$$

因此 $x+y+z\geqslant 101$．而此时

$$102x+203y+304z>102(x+y+z)>5050,$$

矛盾．故不存在满足题意的分法．

二、填空题．

9. 已知 $f(x)=3x^2-x+4$，$g(x)$ 为整系数多项式，$f\left(g(x)\right)=3x^4+18x^3+50x^2+69x+a$，则 $g(x)$ 的各项系数之和为________．

解析　8．

易知 $g(x)$ 为二次多项式，设 $g(x)=px^2+qx+r$，则

$$f(g(x))=3g^2(x)-g(x)+4=3p^2x^4+6pqx^3+\left(3q^2+6pr-p\right)x^2+(6qr-q)x+3r^2-r+4,$$

对比系数，依次解得 $p=1$，$q=3$，$r=4$，$a=48$．故 $g(x)$ 的各项系数之和为 8．

10. 54 张扑克牌排成一列．先去掉第一张，将第二张放到最后；再去掉第三张，将第四张放到最后……以此类推，则最后剩下的那张牌是原先的第________张．

解析　44．

每一轮剩下的牌依次是

$$\begin{aligned}
&2,4,6,\cdots,52,54,\\
&4,8,12,\cdots,48,52,\\
&4,12,20,\cdots,44,52,\\
&12,28,44,\\
&12,44,\\
&44.
\end{aligned}$$

11. 用高斯函数 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数，则方程 $n\left[2002\sqrt{2001^2+1}\right]=2002\left[n\sqrt{2001^2+1}\right]$ 的正整数解有________ 个.

解析　4002 .

因为

$$2002\cdot 2001<2002\sqrt{2001^2+1}<2002\cdot 2001+1,$$

所以 $\left[2002\sqrt{2001^2+1}\right]=2002\cdot 2001$. 于是原方程等价于

$$\left[n\sqrt{2001^2+1}\right]=2001n,$$

即

$$2001n\leqslant n\sqrt{2001^2+1}<2001n+1,$$

解得 $n<\sqrt{2001^2+1}+2001$ ，所以原方程的正整数解有 4002 组.

12. 空间中的一点 $P(x,y,z)$ 满足 $\exists n\in\mathbb{N}^*$ ，使得 $|3x|^n+|8y|^n+|z|^n\leqslant 1$ 成立，则所有满足要求的点 P 所形成的空间几何体的体积为________.

解析　$\dfrac{1}{3}$.

考虑第一卦限，只需要 $3x,8y,z\in(0,1)$ 即可. 因此所有满足要求的点 P 所形成的空间几何体为一个长方体，体积为

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot 1\cdot 8=\frac{1}{3}.$$