宿州市 2023 届高三第一次质量检测
数学参考答案

一、选择题(单项选择)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	A	D	A	D	A	B

二、选择题(多项选择)

题号	9	10	11	12
答案	AB	AB	ABC	ABD

三、填空题

13. 5； 14. $y^2=4x$（$p>\frac{3}{2}$ 即可）； 15. $\frac{2^n-1}{2(2^n+1)}$； 16. $\left[\ln 3-3,\sqrt{5}\right]$.

四、解答题

17. 解：（Ⅰ）由正弦定理可得 $(b-c)(b-c)=a\bullet a-bc$，即 $b^2+c^2-a^2=bc$，……2 分

由余弦定理的变形得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，……………4 分

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$． 5 分

（Ⅱ）$\sin B+\sin C=\sin B+\sin(B+\frac{\pi}{3})=\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\sqrt{3}\sin(B+\frac{\pi}{6})$

……………7 分

由（Ⅰ）知 $A=\frac{\pi}{3}$，所以 $B\in(0,\frac{2}{3}\pi)$，从而 $B+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi)$，

所以 $\sin(B+\frac{\pi}{6})\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，从而 $\sin B+\sin C\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right]$．

即 $\sin B+\sin C$ 的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right]$．……………10 分

18.（Ⅰ）证明：记 F 为棱 PB 靠近点 P 的三等分点,连接 EF,AF．

因为 $EF// BC$，且 $EF=\frac{1}{3}BC$，又 $AD// BC$ 且 $AD=\frac{1}{3}BC$，

所以 $EF//AD$ 且 $EF=AD$,即四边形 ADEF 为平行四边形，……………2 分

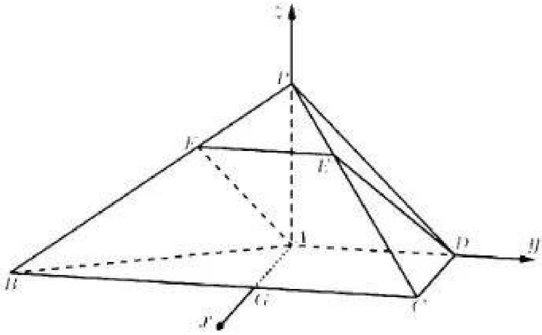
所以 $DE//AF$，又因为 $AF\subset$ 平面 PAB，$DE\not\subset$ 平面 PAB，

所以 $DE//$ 平面 PAB．

（Ⅱ）解：在 BC 上取一点 G，使得 $BC=3GC$，

所以 $GC=AD=2$，又 $AD//BC$，$BC\perp CD$ 知

四边形 $AGCD$ 为矩形，从而 $AG\perp AD$，



又 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，所以 AG,AD,AP 两两垂直，

以 A 为坐标原点，AG,AD,AP 所在直线分别为 x 轴，

y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，

则 $B(2,-4,0),C(2,2,0),D(0,2,0),P(0,0,2),E(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3})$，

从而 $\overrightarrow{BC}=(0,6,0),\overrightarrow{CP}=(-2,-2,2),\overrightarrow{DE}=(\frac{2}{3},-\frac{4}{3},\frac{4}{3})$，……………7 分

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CP}=0\end{cases}，\quad 即\begin{cases}2y=0\\ -2x-2y+2z=0\end{cases}，$$

可取 $\vec{n}=(1,0,1)$ 为平面 PBC 的一个法向量，则

$$\cos<\vec{n},\overrightarrow{DE}>=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{DE}|}=\frac{1\times\frac{2}{3}+1\times\frac{4}{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}，$$

设 DE 与平面 PBC 所成的角为 α，则

$$\sin\alpha=\left|\cos<\vec{n},\overrightarrow{DE}>\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}，$$

即 DE 与平面 PBC 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$．……………12 分

19. 解：（Ⅰ）由题意 $b_{n+1}-b_n=a_{2n+1}-a_{2n-1}=4$，又 $b_1=a_1=1$

所以，数列 $\{b_n\}$ 为以 1 为首项，4 为公差的等差数列，……………4 分

所以 $b_n=1+(n-1)\times4=4n-3$．……………5 分

（Ⅱ）由已知当 n 为偶数时 $a_{n+2}+a_n=4$，所以 ……………6 分

$$S_{23}=a_1+a_2+\cdots+a_{23}$$

$$=(a_1+a_3+\cdots+a_{23})+(a_2+a_4+\cdots+a_{22})$$

$=(b_1+b_2+\cdots+b_{12})+[a_2+(a_4+a_6)+(a_8+a_{10})+\cdots+(a_{20}+a_{22})]$

$=\dfrac{12\times(1+45)}{2}+(1+4\times5)=297$. ……………12 分

20. 解：（Ⅰ）共有 $n+6$ 个机房，抽取 2 个机房有 C_{n+6}^2 种方法，其中全是小机房有 C_6^2 种方法，因此全是小机房的概率为 $\dfrac{C_6^2}{C_{n+6}^2}=\dfrac{1}{3}$，从而解得 $n=4$. ………………4 分

（Ⅱ）X 的可能取值为 0,1,2,3. ………………5 分

$P(X=0)=\dfrac{C_6^0C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{4}{120}=\dfrac{1}{30}$

$P(X=1)=\dfrac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$

$P(X=2)=\dfrac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\dfrac{60}{120}=\dfrac{1}{2}$

$P(X=3)=\dfrac{C_6^3C_4^0}{C_{10}^3}=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$

则随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{30}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{6}$

………………10 分

则 X 的数学期望

$E(X)=0\times\dfrac{1}{30}+1\times\dfrac{3}{10}+2\times\dfrac{1}{2}+3\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{9}{5}$. ………………12 分

21.解：（Ⅰ）设椭圆焦距为 $2c$，由题意可得

$$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 2a+2c=4+2\sqrt{2}\end{cases}$$

解得 $a=2,c=\sqrt{2}$，所以 $b^2=a^2-c^2=2$，

从而椭圆 C 的标准方程 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ………………4 分

（Ⅱ）设点 $M(x_0,y_0)$，则以 OM 为直径的圆的方程为 $x(x-x_0)+y(y-y_0)=0$，

又圆 $O:x^2+y^2=1$，两式相减得直线 AB 的方程为 $x_0x+y_0y=1$， …………5 分

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，由

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ x_0x+y_0y=1\end{cases}$$

消去 y 整理后得 $(2x_0^2+y_0^2)x^2-4x_0x+2-4y_0^2=0$

$x_1+x_2=\dfrac{4x_0}{2x_0^2+y_0^2}, x_1x_2=\dfrac{2-4y_0^2}{2x_0^2+y_0^2}$， ……………7 分

所以 $|PQ|=\sqrt{1+(-\dfrac{x_0}{y_0})^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+(-\dfrac{x_0}{y_0})^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$$=\sqrt{1+\frac{x_0^2}{y_0^2}}\sqrt{(\frac{4x_0}{2x_0^2+y_0^2})^2-4\times\frac{2-4y_0^2}{2x_0^2+y_0^2}}=2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}\sqrt{x_0^2+1}}{2x_0^2+y_0^2}$$

又点 O 到直线 PQ 的距离 $d=\dfrac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$，

设 ΔOPQ 的面积为 S，则

$$S=\frac{1}{2}|PQ|\cdot d=\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}\sqrt{x_0^2+1}}{2x_0^2+y_0^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{6}\sqrt{x_0^2+1}}{4x_0^2+4-x_0^2}=\frac{2\sqrt{6}\sqrt{x_0^2+1}}{3x_0^2+4}=2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{x_0^2+1}}{3(x_0^2+1)+1}$$

$$=2\sqrt{6}\times\frac{1}{3\sqrt{x_0^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x_0^2+1}}}$$

其中 $x_0^2\in[0,4)$，令 $t=\sqrt{x_0^2+1}$，则 $t\in[1,\sqrt{5})$，

设 $f(t)=3t+\dfrac{1}{t}$，$t\in[1,\sqrt{5})$，则 $f'(t)=3-\dfrac{1}{t^2}>0$，

所以 $f(t)$ 在区间 $[1,\sqrt{5})$ 上单调递增，从而得 $f(t)\in\left[4,\dfrac{16\sqrt{5}}{5}\right)$，

于是可得 $S\in\left(\dfrac{\sqrt{30}}{8},\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right]$，

即 ΔOPQ 的面积的取值范围为 $\left(\dfrac{\sqrt{30}}{8},\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right]$. ……………12 分

22. 解：（Ⅰ）当 $b=0$ 时，$f(x)=x^2+a(x-\ln x)$，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$$f'(x)=2x+a-\frac{a}{x}=\frac{2x^2+ax-a}{x},$$ ……………………1 分

当 $a^2+8a\le 0$，即 $-8\le a\le 0$ 时，$f'(x)\ge 0$ 且不恒为 0，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增； ……………………2 分

当 $a<-8$ 时，方程 $2x^2+ax-a=0$ 有两不等正根 $\frac{-a\pm\sqrt{a^2+8a}}{4}$，

结合定义域由 $f'(x)>0$ 可得 $x\in(0,\frac{-a-\sqrt{a^2+8a}}{4})\cup(\frac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4},+\infty)$，

由 $f'(x)<0$ 可得 $x\in(\frac{-a-\sqrt{a^2+8a}}{4},\frac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4})$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(\frac{-a-\sqrt{a^2+8a}}{4},\frac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4})$ 上单调递减，

在区间 $(0,\frac{-a-\sqrt{a^2+8a}}{4})$ 和 $(\frac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4},+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，方程 $2x^2+ax-a=0$ 有一负根 $\frac{-a-\sqrt{a^2+8a}}{4}$ 和一正根 $\frac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4}$，结合定义域由 $f'(x)>0$ 可得 $x\in(\frac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4},+\infty)$，

由 $f'(x)<0$ 可得 $x\in(0,\frac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4})$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4})$ 上单调递减，

在区间 $(\frac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4},+\infty)$ 上单调递增.

综上可知：

当 $a<-8$ 时，$f(x)$ 在区间 $(\frac{-a-\sqrt{a^2+8a}}{4},\frac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4})$ 上单调递减，……）上

在区间 $(0,\dfrac{-a-\sqrt{a^2+8a}}{4})$ 和 $(\dfrac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4},+\infty)$ 上单调递增；

当 $-8\le a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4})$ 上单调递减，

在区间 $(\dfrac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4},+\infty)$ 上单调递增. ………………6 分

（II）当 $b=1$ 时，$f(x)=x^2+a(x-\ln x)-\dfrac{e}{x}$，令 $g(x)=x^2+a(x-\ln x)$，$h(x)=\dfrac{e}{x}$，

则 $f(x)>0$，即为 $g(x)>h(x)$，

而 $h(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递减，所以当 $1\le x\le e$ 时，$h(x)\ge h(e)=1$.

又 $g(e)=e^2+ae-a$，

①当 $g(e)>h(e)$，即 $e^2+ae-a>1$ 时，$a>-1-e$，符合题意； ………………8 分

②当 $-8\le a\le -1-e$ 时，由（I）知 $g(x)$ 在 $[1,e]$ 上是增函数，

恒有 $g(x)\le g(e)\le h(e)=1$，故不存在 $x\in[1,e]$，使 $g(x)>h(x)$；

③当 $a<-8$ 时，由于 $1\le x\le e$ 时，$x-\ln x>0$，

所以 $g(x)=x^2+a(x-\ln x)<x^2-8(x-\ln x)$，令 $m(x)=x^2-8(x-\ln x)$，

则 $m'(x)=2x-8+\dfrac{8}{x}=\dfrac{2(x^2-4x+4)}{x}=\dfrac{2(x-2)^2}{x}\ge 0$

所以 $m(x)$ 在 $[1,e]$ 上是增函数，最大值为 $m(e)$，

又 $m(e)-h(e)=e^2-8(e-1)-1=e^2-8e+7=(e-1)(e-7)<0$，

所以 $m(e)<h(e)$，此时恒有 $g(x)<h(x)$，

因此不存在 $x\in[1,e]$，使 $g(x)>h(x)$.

综上可知，$a>-1-e$.

即 a 的取值范围为 $(-1-e,+\infty)$.

另解：分离变量可得：$a>\dfrac{\frac{e}{x}-x^2}{x-\ln x}$，令 $F(x)=\dfrac{\frac{e}{x}-x^2}{x-\ln x},x\in[1,e]$，则

$$F'(x)=\frac{(-\frac{e}{x^2}-2x)(x-\ln x)-(\frac{e}{x}-x^2)(1-\frac{1}{x})}{(x-\ln x)^2}$$

$$=\frac{\frac{e}{x^2}(\ln x-2x+1)+x(2\ln x-x-1)}{(x-\ln x)^2}$$

易得当 $x\in[1,e]$ 时，$\ln x-2x+1<0$，且 $2\ln x-x-1<0$，从而 $F'(x)<0$，

所以 $F(x)$ 在 $[1,e]$ 单调递减，于是 $a>F(x)_{\min}=F(e)=-1-e$.

（说明：解答题若用其它方法，可酌情给分！）