机密★启用前(全国卷文科数学)

华大新高考联盟2021届高三11月教学质量测评

文科数学

本试题卷共4页,23题(含选考题)。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合$A=\{x|(2x+5)(x-2)<0\}$,$B=\{-3,-1,1,2,3\}$,则$(\complement_R A)\cap B=$

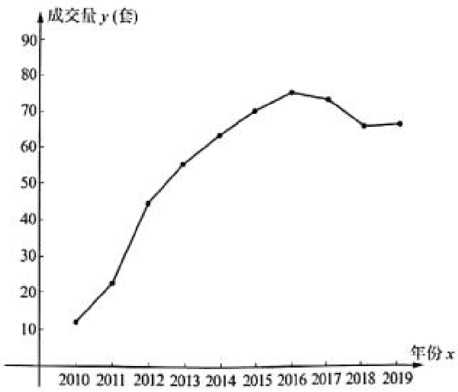
A. $\{-1,1\}$　　B. $\{-1,1,2\}$

C. $\{-3,2,3\}$　　D. $\{-3,2\}$

2. 若$z=\frac{3}{i-1}$(i为虚数单位),则$z+2i$的虚部为

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{3}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$

3. 自2010年以来,一、二、三线的房价均呈现不同程度的上升趋势,以房养老、以房为聘的理念深入人心,使得各地房产中介公司的交易数额日益增加. 现将A房产中介公司2010—2019年4月份的售房情况统计如图所示,根据2010—2013年、2014—2016年、2017—2019年的数据分别建立回归直线方程$\hat{y}=\hat{b}_1x+\hat{a}_1$、$\hat{y}=\hat{b}_2x+\hat{a}_2$、$\hat{y}=\hat{b}_3x+\hat{a}_3$,则



A. $\hat{b}_1>\hat{b}_2>\hat{b}_3$,$\hat{a}_3>\hat{a}_2>\hat{a}_1$

B. $\hat{b}_2>\hat{b}_1>\hat{b}_3$,$\hat{a}_3>\hat{a}_2>\hat{a}_1$

C. $\hat{b}_1>\hat{b}_2>\hat{b}_3$,$\hat{a}_3>\hat{a}_1>\hat{a}_2$

D. $\hat{b}_2>\hat{b}_1>\hat{b}_3$,$\hat{a}_3>\hat{a}_1>\hat{a}_2$

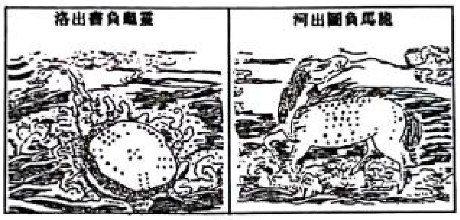
4. 已知m,n是两条不同的直线,α,β是两个不同的平面,则下列结论一定正确的是

A. 若$m\subset\alpha$,$m\perp n$,则$n\perp\alpha$　　B. 若$\alpha\perp\beta$,$m\subset\alpha$,则$m\perp\beta$

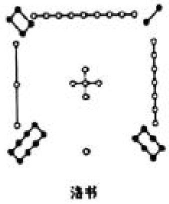
C. 若$m\perp\alpha$,$n\perp\beta$,$\alpha//\beta$,则$m\perp n$　　D. 若$m//\alpha$,$n\perp\beta$,$\alpha//\beta$,则$m\perp n$

5. 龙马负图、神龟载书图像如图甲所示,数千年来被认为是中华传统文化的源头;其中洛书有云,神龟出于洛水,甲壳上的图像如图乙所示,其结构是戴九履一,左三右七,二四为肩,六八为足,以五居中,五方白圈皆

阳数，四角黑点为阴数；若从阳数中随机抽取 2 个，则被抽到的 2 个数的数字之和超过 10 的概率为



图甲



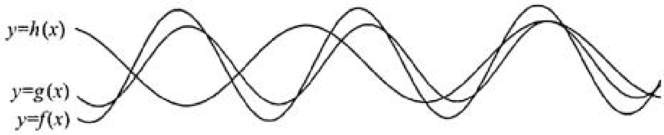
图乙

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{3}{5}$

6. 若直线 l：$3\sin\theta\cdot x-2y=0$ 与圆 C：$x^2+y^2-2\sqrt{13}y-5=0$ 交于 M,N 两点，则 $|MN|$ 的最小值为

A. $4\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{6}$　　C. $2\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{7}$

7. 已知 $y=\sin2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$，$y=\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$，$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$的部分图像如下所示，则



A. $f(x)=\sin2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$，$g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$，$h(x)=\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$

B. $f(x)=\sin2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$，$g(x)=\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$，$h(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$

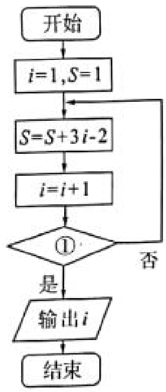
C. $f(x)=\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$，$g(x)=\sin2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$，$h(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$

D. $f(x)=\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$，$g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$，$h(x)=\sin2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

8. 已知 $a=\log_7 2$，$b=-\cos(\pi+1)$，$c=3^{0.2}$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

9. 运行如图所示的程序框图，若输出的 i 的值为 7，则判断框①中可以填



A. $S>20$　　B. $S>30$　　C. $S>50$　　D. $S>70$

10. 已知△ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $a^2=2b^2-2c^2$，$b-c=\frac{2\sin A}{\sin B+\sin C}$，若△$ABC$ 的外接圆半径为 $2\sqrt{2}$，则 $\sin A=$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

11. 已知抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，点 M,N 在抛物线 C 上，且关于 x 轴对称，若 $NF\perp OM$，则△OMN 的面积为

A. $5\sqrt{5}$　　B. $15\sqrt{5}$　　C. $10\sqrt{5}$　　D. $20\sqrt{5}$

12. 已知关于 x 的不等式 $x^2+1\geqslant\frac{ax^3+x^2+ax}{e^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围为

A. $(-\infty,e]$　　B. $\left(-\infty,e-\frac{1}{2}\right]$　　C. $(-\infty,e-1]$　　D. $(-\infty,e-2]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若实数 x,y 满足条件 $\begin{cases}4x+y\leqslant 5,\\ x-2y+6\geqslant 0,\\ y\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最小值为________.

14. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(\lambda,2)$，若 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$，则 λ 的值为________.

15. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，图像关于原点对称，且 $f(x+4)=f(x)$，若 $f(3)<1$，$f(2021)=\log_3(m-1)$，则实数 m 的取值范围为________.

16. 已知三棱锥 S-ABC 中，$SA\perp SB$，$SA\perp SC$，$SB\perp SC$，若三棱锥 S-ABC 的外接球的表面积为 24π，记 $S=S_{\triangle SBC}+S_{\triangle SAC}+S_{\triangle SAB}$，则 S 的最大值为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17.(12 分)

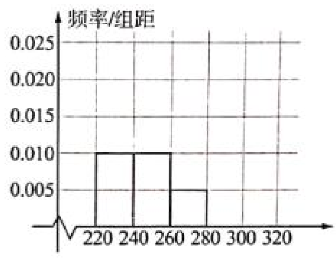
山竹，原产于马鲁古，具有清热泻火、生津止渴的功效，其含有丰富的蛋白质与脂类，对体弱、营养不良的人群都有很好的调养作用，因此被誉为夏季的“水果之王”，受到广大市民的喜爱. 现将某水果经销商近一周内山竹的销售情况统计如下表所示：

采购数量 x(单位：箱)	$[220,240)$	$[240,260)$	$[260,280)$	$[280,300)$	$[300,320]$
采购人数	100	100	50	200	50

(1)根据表格中数据，完善频率分布直方图；

(2)求近一周内采购量在 286 箱以下(含 286 箱)的人数；

(3)计算近一周内采购数量 x 的平均值.

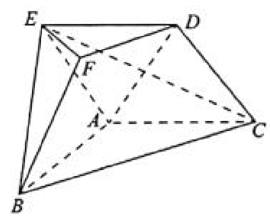


18.(12 分)

如图所示，多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ACDE$ 为菱形，$\angle ACD=60°$，平面 $ACDE\perp$ 平面 ABC，$BC/\!/DF$，$AB=AC=BC=2DF=2$.

(1)求证：平面 $ABC/\!/$平面 DEF；

(2)求多面体 $ABCDEF$ 的体积.



19.(12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=3n^2-7n$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=3^n\cdot a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

20.（12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 过点 $\left(\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(-1,\frac{3}{2}\right)$，椭圆 C 与 x 轴交于 A，C 两点，与 y 轴交于 B，D 两点.

(1)求四边形 $ABCD$ 的面积；

(2)若四边形 $ABCD$ 的内切圆 O 的半径为 R，点 M，N 在椭圆 C 上，直线 MN 斜率存在，且与圆 O 相切，切点为 L，求证：$\frac{|LM|}{R}=\frac{R}{|LN|}$.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+2$.

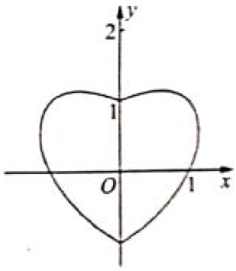
(1)求函数 $f(x)$ 的极值；

(2)若关于 x 的不等式 $2f(x)+n(x^2+4x)\geqslant 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，其中 $n\geqslant 0$，求实数 n 的取值范围.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多选，则按所做的第一题计分。

22.［选修 4—4：坐标系与参数方程］(10 分)

如图所示，已知曲线 C 的极坐标方程为 $\sqrt{1-|\cos\theta|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{1}{\rho}$，点 $P\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$. 以极点为原点，极轴为 x 轴建立平面直角坐标系 xOy.



(1)求曲线 C 的直角坐标方程；

(2)已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=3-3t,\\ y=-2+4t\end{cases}$（$t$ 为参数），若直线 l 与曲线 C 交于 M，N 两点，求 $\frac{1}{|PM|}+\frac{1}{|PN|}$ 的值.

23.［选修 4—5：不等式选讲］(10 分)

已知函数 $f(x)=|2x-2|+|x-6|$.

(1)求不等式 $f(x)>12$ 的解集；

(2)记集合 $A=\{x\,|\,f(x)-2a=0\}$，若 $A\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

机密★启用前(全国卷文科数学)

华大新高考联盟2021届高三11月教学质量测评

文科数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】C

【命题意图】本题考查集合的运算、一元二次不等式的解法,考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$A=\{x|(2x+5)(x-2)<0\}=\left\{x\middle|-\frac{5}{2}<x<2\right\}$,故$\complement_{R}A=\left\{x\middle|x\leqslant-\frac{5}{2}\text{或}x\geqslant2\right\}$,则$(\complement_{R}A)\cap B=\{-3,2,3\}$,故选C.

2.【答案】B

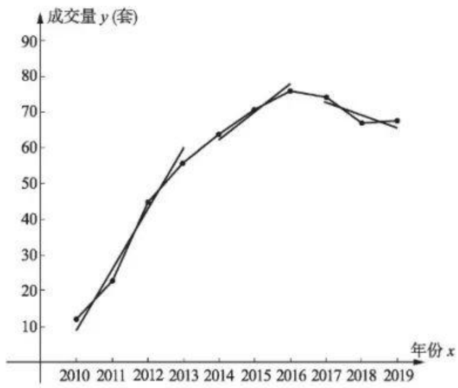
【命题意图】本题考查复数的概念、复数的运算,考查考生数学运算的核心素养.

【解析】依题意,$z=\frac{3}{i-1}=\frac{3(i+1)}{(i-1)(i+1)}=\frac{3(i+1)}{-2}=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$,则$z+2i=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i+2i=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$,故所求虚部为$\frac{1}{2}$,故选B.

3.【答案】A

【命题意图】本题考查回归直线方程的图像,考查考生直观想象、数学建模、逻辑推理的核心素养.

【解析】观察可知,$\hat{b}_1>\hat{b}_2>\hat{b}_3$,$\hat{a}_3>\hat{a}_2>\hat{a}_1$,故选A.



4.【答案】D

【命题意图】本题考查空间线面的位置关系,考查考生直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】D选项中,若$n\perp\beta$,$\alpha/\!/\beta$,则$n\perp\alpha$,而$m/\!/\alpha$,故$m\perp n$,故选D.

5.【答案】A

【命题意图】本题考查数学文化、古典概型的概率,考查考生数学建模、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,阳数为1、3、5、7、9,故所有的情况为(1,3),(1,5),(1,7),(1,9),(3,5),(3,7),(3,9),(5,7),(5,9),(7,9),共10种,其中满足条件的为(3,9),(5,7),(5,9),(7,9),共4种,故所求概率$P=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$,故选A.

6.【答案】C

【命题意图】本题考查圆的方程、直线与圆的弦长,考查考生数学运算、逻辑推理的数学素养.

【解析】依题意,圆$C:x^2+(y-\sqrt{13})^2=18$,故圆心$C(0,\sqrt{13})$到直线$l:3\sin\theta\cdot x-2y=0$的距离$d=\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{9\sin^2\theta+4}}$,故$|MN|=2\sqrt{18-\frac{4\times13}{9\sin^2\theta+4}}\geqslant2\sqrt{5}$,当且仅当$\sin^2\theta=0$时等号成立,故$|MN|_{\min}=2\sqrt{5}$,故选C.

7.【答案】A

【命题意图】本题考查三角函数的图像与性质,考查考生直观想象、逻辑推理的数学素养.

【解析】依题意,$y=\sin2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin2x+\cos2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,故$y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的最大

值为$\sqrt{2}$；而 $y=\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$，$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$的最大值均为 1，故 $f(x)=\sin2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$；而 $y=\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$，$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$的周期分别为$\frac{4\pi}{3}$，$\pi$，故 $g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$，$h(x)=\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$，故选 A.

8.【答案】A

【命题意图】本题考查考生的数学运算、逻辑推理的数学素养.

【解析】依题意，$a=\log_7 2<\log_7\sqrt{7}=\frac{1}{2}$，$b=-\cos(\pi+1)=\cos1>\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，故 $b\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，$c=3^{0.2}>3^0=1$，则 $a<b<c$，故选 A.

9.【答案】C

【命题意图】本题考查算法与程序框图，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】运行程序框图，第一次，$S=2,i=2$；第二次，$S=6,i=3$；第三次，$S=13,i=4$；第四次，$S=23,i=5$；第五次，$S=36,i=6$；第六次，$S=52,i=7$；此时要输出，则判断框中可以填 C.

10.【答案】A

【命题意图】本题考查正弦定理，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】由 $b-c=\frac{2\sin A}{\sin B+\sin C}$，即$(b-c)(b+c)=2a$，则 $b^2-c^2=2a$；与 $a^2=2b^2-2c^2$ 联立，可得 $a^2=4a$；因为 $a>0$，故 $a=4$，则 $\sin A=\frac{a}{2r}=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故选 A.

11.【答案】C

【命题意图】本题考查抛物线的方程与性质，考查考生直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】不妨设 $M(a^2,2a)$，$N(a^2,-2a)(a>0)$，则 $k_{OM}=\frac{2}{a}$，$k_{NF}=-\frac{2a}{a^2-1}$，由 $k_{NF}\cdot k_{OM}=-1$，解得 $a=\sqrt{5}$，故$\triangle OMN$ 的面积为$\frac{1}{2}\times5\times4\sqrt{5}=10\sqrt{5}$，故选 C.

12.【答案】B

【命题意图】本题考查利用导数研究函数的性质，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

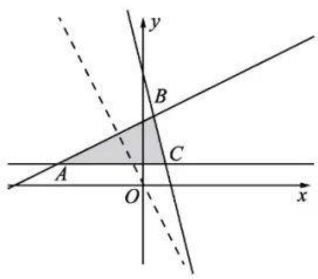
【解析】依题意，$x\in(0,+\infty)$，故 $a\leqslant\frac{(x^2+1)e^x-x^2}{x^3+x}=\frac{e^x}{x}-\frac{x}{x^2+1}$，令 $g(x)=\frac{e^x}{x}-\frac{x}{x^2+1}$，故 $a\leqslant[g(x)]_{\min}$，而 $g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}-\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=(x-1)\left[\frac{e^x}{x^2}+\frac{x+1}{(x^2+1)^2}\right]$，令 $g'(x)=0$，故 $x=1$，故当 $x\in(0,1)$时，$g'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)>0$，故 $a\leqslant g(1)=e-\frac{1}{2}$，即实数 a 的取值范围为$\left(-\infty,e-\frac{1}{2}\right]$，故选 B.

二、填空题

13.【答案】-7.

【命题意图】本题考查线性规划，考查考生直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】作出不等式组所表示的平面区域如下图阴影部分所示；观察可知，当直线 $z=2x+y$ 过点 A 时，z 有最小值，联立$\begin{cases}x-2y+6=0,\\y=1,\end{cases}$解得 $A(-4,1)$，故 $z=2x+y$ 的最小值为-7.



14.【答案】$-\frac{1}{4}$.

【命题意图】本题考查平面向量的坐标运算、向量垂直的坐标表示，考查考生

数学运算的核心素养.

【解析】依题意，$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(2+2\lambda,3)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=0$，即 $4+4\lambda-3=0$，解得 $\lambda=-\frac{1}{4}$.

15.【答案】$\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$.

【命题意图】本题考查函数的性质，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$f(2021)=f(1)=\log_3(m-1)$；而 $f(3)<1\Leftrightarrow f(-1)<1\Leftrightarrow f(1)>-1$，故 $\log_3(m-1)>-1$，即 $m-1>\frac{1}{3}$，故 $m>\frac{4}{3}$.

16.【答案】12.

【命题意图】本题考查空间几何体的结构特征、球体的表面积，考查考生数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】设 $SA=x,SB=y,SC=z$，则 $x^2+y^2+z^2=(2R)^2$；而 $4\pi R^2=24\pi$，得 $x^2+y^2+z^2=24$；故 $S=S_{\triangle SBC}+S_{\triangle SAC}+S_{\triangle SAB}=\frac{1}{2}(xy+yz+xz)\leqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)=12$，当且仅当 $x=y=z=2\sqrt{2}$ 时等号成立，故 S 的最大值为 12.

三、解答题

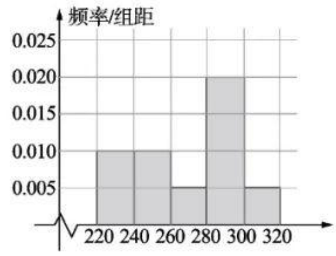
17.【命题意图】本题考查频率分布直方图、样本的数字特征、离散型随机变量的分布列以及数学期望，考查考生直观想象、数学建模、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，转化频率分布表如下所示：

采购数量 x(单位:箱)	[220,240)	[240,260)	[260,280)	[280,300)	[300,320]
采购人数	100	100	50	200	50
频率	0.2	0.2	0.1	0.4	0.1
频率/组距	0.010	0.010	0.005	0.020	0.005

…………………………………………………………………………………… (2分)

完善频率分布直方图如图所示：



…………………………………… (4分)

(2)采购量在 286 箱以下(含 286)的频率为 $0.2+0.2+0.1+0.4\times\frac{6}{20}=0.62$；…………………… (6分)

故采购量在 286 箱以下(含 286)的人数为 ~~200×0.62=124;~~ 500*0.62=310 …………………………………… (8分)

(3)依题意，所求平均值为 $230\times0.2+250\times0.2+270\times0.1+290\times0.4+310\times0.1=46+50+27+116+31=270$. ……………………………………………………………… (12分)

18.【命题意图】本题考查空间线面的位置关系，空间几何体的体积，考查考生逻辑推理，数学运算的核心素养.

【解析】(1)∵四边形 $ACDE$ 是菱形，∴$AC/\!/DE$.

又∵$AC\subset$平面 ABC，$DE\not\subset$平面 ABC，∴$DE/\!/$平面 ABC. …………………………………… (2分)

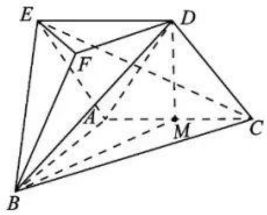
同理得，$DF/\!/$平面 ABC. ……………………………………………………………… (3分)

∵$DE,DF\subset$平面 DEF，且 $DE\cap DF=D$，∴平面 $ABC/\!/$平面 DEF；………………………… (5分)

(2)$\because AC /\!/ DE, DF /\!/ BC$, $\therefore \angle EDF = \angle ACB = 60°$.

$\because DE = AC = 2, DF = \frac{1}{2}BC = 1$, $\therefore S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. …………………………………… (6 分)

在菱形 $ACDE$ 中, $S_{\triangle ACDE} = 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. ……………………………………………………… (7 分)



$\because$ 平面 $ABC \perp$ 平面 $ACDE$, 取 AC 的中点为 M, 连接 BM, DM,

$\therefore BM \perp$ 平面 $ACDE$, $DM \perp$ 平面 ABC. ……………………………………… (8 分)

由(1)知, 平面 $ABC /\!/$ 平面 DEF,

$\therefore$ 点 B 到平面 DEF 的距离为 $DM = \sqrt{3}$. ……………………………… (10 分)

又 $\because$ 点 B 到平面 $ACDE$ 的距离为 $BM = \sqrt{3}$, 连接 BD,

则 $V = V_{B\text{-}DEF} + V_{B\text{-}ACDE} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3}\right) \times \sqrt{3} = \frac{5}{2}$. ………………………………………………… (12 分)

19.【命题意图】本题考查数列前 n 项和与通项关系、错位相减法, 考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)当 $n=1$ 时, 则 $a_1 = S_1 = -4$; ……………………………………………………………………… (1 分)

当 $n \geqslant 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 - 7n - 3(n-1)^2 + 7(n-1) = 6n - 10$; ………………………………… (4 分)

故对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n = 6n - 10$; ……………………………………………………………………………… (5 分)

(2)依题意, $b_n = 3^n \cdot (6n - 10)$,

故 $T_n = 3^1 \cdot (-4) + 3^2 \cdot 2 + 3^3 \cdot 8 + \cdots + 3^n \cdot (6n - 10)$, ……………………………………………… (6 分)

故 $3T_n = 3^2 \cdot (-4) + 3^3 \cdot 2 + 3^4 \cdot 8 + \cdots + 3^{n+1} \cdot (6n - 10)$, ……………………………………………… (7 分)

两式相减可得, $-2T_n = -3^1 \cdot 4 + 3^2 \cdot 6 + 3^3 \cdot 6 + \cdots + 3^n \cdot 6 - 3^{n+1} \cdot (6n - 10)$, ………………… (8 分)

即 $-2T_n = 3 \cdot 6 + 3^2 \cdot 6 + 3^3 \cdot 6 + \cdots + 3^n \cdot 6 - 3^{n+1} \cdot (6n - 10) - 3 \cdot 10$,

整理可得, $T_n = \left(3n - \frac{13}{2}\right) \cdot 3^{n+1} + \frac{39}{2}$. ………………………………………………………………… (12 分)

20.【命题意图】本题考查椭圆的方程、直线与椭圆的综合性问题, 考查考生直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意, $\begin{cases} \frac{3}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1, \\ \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1, \end{cases}$ …………(2 分) 解得 $\begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 3, \end{cases}$ …………………………………… (4 分)

故四边形 $ABCD$ 的面积 $S = 2ab = 4\sqrt{3}$; ……………………………………………………………………… (5 分)

(2)要证: $\frac{|LM|}{R} = \frac{R}{|LN|}$, 只需证 $OM \perp ON$, 易知 $R = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, ……………………………………… (6 分)

设 $MN: y = kx + m$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 则 $\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, 所以 $7m^2 = 12(1+k^2)$; ①

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = kx + m \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0$

当 $\Delta > 0$, $x_1 + x_2 = \frac{-8km}{3+4k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 12}{3+4k^2}$, ……………………………………………………… (8 分)

$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_1 x_2 + (kx_1 + m)(kx_2 + m) = (1+k^2)x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2$ ……… (9 分)

$= \frac{(1+k^2)(4m^2 - 12)}{3+4k^2} + \frac{-8k^2m^2}{3+4k^2} + m^2 = \frac{7m^2 - 12(1+k^2)}{3+4k^2}$, ……………………………… (11 分)

由①得 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$, 所以 $OM \perp ON$. ………………………………………………………………… (12 分)

21.【命题意图】本题考查利用导数研究函数的性质，考查考生直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，$f'(x)=(x-1)e^x$，…………（1分）

可知当 $x\in(-\infty,1)$时，$f'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，…………（3分）

故当 $x=1$ 时，函数 $f(x)$有极小值 $f(1)=2-e$，无极大值；…………（5分）

(2)设 $h(x)=2f(x)+n(x^2+4x)=(2x-4)e^x+n(x^2+4x)+4$，

因为 $h'(x)=(2x-2)e^x+2n(x+2)=m(x)$，则 $m'(x)=2xe^x+2n$，…………（6分）

因为 $n\geqslant0$，有 $m'(x)\geqslant0$，此时 $m(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，则 $m(x)\geqslant m(0)=4n-2$；

(i)若 $4n-2\geqslant0$ 即 $n\geqslant\frac{1}{2}$时，$h(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，则 $h(x)_{\min}=h(0)=0$ 恒成立；…………（8分）

(ii)若 $4n-2<0$，即 $0\leqslant n<\frac{1}{2}$时，存在 $x_0\in[0,+\infty)$，$h'(x_0)=0$，此时函数 $y=h(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，且 $h(0)=0$，故不等式不可能恒成立，不合题意，舍去；…………（11分）

综上所述，实数 n 的取值范围为$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.…………（12分）

22.【命题意图】本题考查极坐标方程、直角坐标方程的转化、直线参数方程的应用，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】因为 $\rho\sqrt{1-|\cos\theta|\cdot\sin\theta}=1$，故 $\rho^2(1-|\cos\theta|\cdot\sin\theta)=1$，

故 $\rho^2-|\rho\cos\theta|\cdot\rho\sin\theta=1$，即 $x^2+y^2-|x|y=1$；…………（4分）

(2)设直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=-\frac{3}{5}t,\\y=2+\frac{4}{5}t,\end{cases}$（$t$ 为参数），…………（6分）

若直线 l 与曲线 C 交于 M,N，则只能交于 y 轴右侧部分 $x^2+y^2-xy=1$，将直线的参数方程代入，

可得$\frac{37}{25}t^2+\frac{22}{5}t+3=0$，(8分)

设 M,N 对应的参数分别为 t_1,t_2，故$|PM|\cdot|PN|=|t_1t_2|=\frac{75}{37}$，$|PM|+|PN|=|t_1|+|t_2|=\frac{110}{37}$，

故$\frac{1}{|PM|}+\frac{1}{|PN|}=\frac{|PM|+|PN|}{|PM|\cdot|PN|}=\frac{22}{15}$.…………（10分）

23.【命题意图】本题考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，$|2x-2|+|x-6|>12$；

当 $x<1$ 时，$2-2x+6-x>12$，则 $x<-\frac{4}{3}$，故 $x<-\frac{4}{3}$；…………（2分）

当 $1\leqslant x\leqslant6$ 时，$2x-2+6-x>12$，则 $x>8$，无解；…………（3分）

当 $x>6$ 时，$2x-2+x-6>12$，则 $x>\frac{20}{3}$，故 $x>\frac{20}{3}$；…………（4分）

故不等式 $f(x)>12$ 的解集为$\left\{x\middle|x<-\frac{4}{3}\text{或}x>\frac{20}{3}\right\}$；…………（5分）

(2)依题意，$f(x)=2a$，

而 $f(x)=|2x-2|+|x-6|=|x-1|+|x-1|+|x-6|\geqslant|x-1|+|x-6|$，

而$|x-1|+|x-6|\geqslant5$，…………（7分）

当且仅当 $1\leqslant x\leqslant6$ 时等号成立，…………（8分）

因为 $A\neq\varnothing$，故 $2a\geqslant5$，则 $a\geqslant\frac{5}{2}$，故实数 a 的取值范围为$\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$.…………（10分）

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 “ 专业、专注、有态度 ” 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。