

2023 年南通市高一学年度质量监测

数 学

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $\frac{i}{1-i}$ 的实部为

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -1 D. 1

【答案】A

2. 设全集 $U = \mathbf{Z}$ ，集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ， $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ，则 $\{-2\} =$

- A. $A \cap B$ B. $A \cup B$ C. $A \cap (\complement_U B)$ D. $(\complement_U A) \cap B$

【答案】C

3. 在边长为 3 的正方形 $ABCD$ 中， $\vec{DE} = 2\vec{EC}$ ，则 $\vec{AC} \cdot \vec{AE} =$

- A. -5 B. 5 C. 15 D. 25

【答案】C

4. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c 。若 $\sin A : \sin B : \sin C = 4 : 5 : 6$ ，则 $\cos A =$

- A. $-\frac{9}{16}$ B. $\frac{9}{16}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{4}$

【答案】D

5. 函数 $f(x) = x + 2^x$ 的零点所在区间是

- A. $(-2, -1)$ B. $(-1, 0)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, 2)$

【答案】B

6. 已知 a, b 是两条不同的直线，且 $a \parallel$ 平面 α ，则“ $b \perp \alpha$ ”是“ $a \perp b$ ”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

数学试卷 第 1 页 (共 10 页)

【答案】A

7. 一组样本数据 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8$ 的平均数为 m , 标准差为 3. 另一组样本数据 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8, m$ 的平均数为 $\bar{x}$, 标准差为 s , 则

A. $\bar{x} = m, s > 3$ B. $\bar{x} = m, s < 3$ C. $\bar{x} \neq m, s > 3$ D. $\bar{x} \neq m, s < 3$

【答案】B

8. 某船在海面上航行至 A 处, 测得山顶 P 位于其正西方向且仰角为 45° , 该船继续沿南偏东 30° 的方向航行 5 百米至 B 处, 测得山顶 P 的仰角为 30° , 则该山顶高于海面

A. 2.5 百米 B. 5 百米 C. $5\sqrt{2}$ 百米 D. $5\sqrt{3}$ 百米

【答案】B

- 二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 在 $\triangle ABC$ 中, M 为边 AB 的中点, 则

A. $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{BC}$ B. $\vec{MA} - \vec{MC} = \vec{CA}$
C. $\vec{CM} = \vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$ D. $\vec{AM} = \vec{CB} - \vec{CM}$

【答案】BCD

10. 关于函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 下列说法正确的是

A. 最小正周期为 π B. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
C. 图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 对称 D. 在 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ 上的最大值为 1

【答案】ACD

11. 同时抛掷两枚硬币, 记“出现两个正面”为事件 A , “出现两个反面”为事件 B , 则

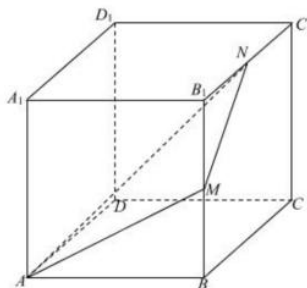
A. $A+B$ 为必然事件 B. AB 为不可能事件
C. A 与 B 为互斥事件 D. A 与 B 为独立事件

【答案】BC

12. 如图, 在底面为平行四边形的直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $\angle D_1A_1B_1 = 60^\circ$,

$AA_1 = A_1B_1 = A_1D_1 = 2$, M, N 分别为棱 BB_1, B_1C_1 的中点, 则

- A. $D_1N \perp BC$
B. A_1C 与平面 AA_1B_1B 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$
C. 三棱柱 $ABD-A_1B_1D_1$ 的外接球的表面积为 $\frac{28\pi}{3}$
D. 点 A_1 到平面 AMN 的距离为 $\sqrt{2}$



【答案】ACD

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 某学生 8 次素养测试的成绩统计如下: 72, 76, 78, 82, 86, 88, 92, 98, 则该组数据的第 80 百分位数为_____.

【答案】92

14. 已知圆锥的侧面展开图是一个半径为 2 的半圆, 则该圆锥的体积为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$

15. 满足 $z^2 \in \mathbb{R}$, $|z-i|=1$ 的一个复数 $z =$ _____.

【答案】0 或 $2i$ (答案不唯一, 若写两个答案以第一个为准)

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $A = \frac{2\pi}{3}$, $a = 4$, D 为 BC 的中点,

$AD = \sqrt{2}$, 则 $\triangle ABC$ 的周长为_____.

【答案】 $4 + 2\sqrt{5}$

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

某种经济树木根据其底部周长的不同售价有所差异, 底部周长在 $85\text{ cm} \sim 105\text{ cm}$ 为三类树, 底部周长在 $105\text{ cm} \sim 125\text{ cm}$ 为二类树, 底部周长大于或等于 125 cm 为一类树. 为了解一大片该经济林的生长情况, 随机测量其中 100 株树木的底部周长 (单位: cm), 数据均落在 $85\text{ cm} \sim 135\text{ cm}$ 之间, 按照 $[85, 95)$, $[95, 105)$, $[105, 115)$, $[115, 125)$, $[125, 135]$ 分

成 5 组，制成了如图所示的频率分布直方图.

(1) 估计该片经济林中二类树约占多少;

(2) 将同组中的每个数据都用该组区间中点的数值代替，试估计该经济林中树木的平均底部周长.

解: (1) 由频率分布直方图可得,

$$0.007 \times 10 + 0.018 \times 10 + 0.039 \times 10 + a \times 10 + 0.015 \times 10 = 1,$$

$$\text{所以 } 10a = 0.21, \text{ 解得 } a = 0.021. \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

因为底部周长在 105 cm~125 cm 为二类树,

$$\text{所以由图可得, } 0.039 \times 10 + 0.021 \times 10 = 0.6.$$

答: 该片经济林中二类树木约占 60%. $\dots\dots 5 \text{ 分}$

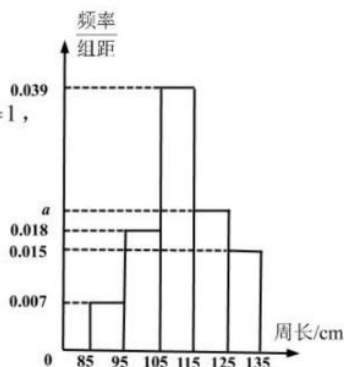
(2) 由题意可得,

$$90 \times 0.07 + 100 \times 0.18 + 110 \times 0.39 + 120 \times 0.21 + 130 \times 0.15$$

$$= 6.3 + 18 + 42.9 + 25.2 + 19.5$$

$$= 111.9 \text{ cm}$$

答: 估计该经济林中树木的平均底部周长为 111.9 cm. $\dots\dots 10 \text{ 分}$



18. (12 分)

如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp BC$, M, N 分别为 AB, AC 的中点.

(1) 证明: $MN \parallel$ 平面 PBC ;

(2) 证明: 平面 $PMN \perp$ 平面 PAB .

解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 M, N 分别为 AB, AC 的中点,

$$\text{所以 } MN \parallel BC. \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

又因为 $MN \not\subset$ 平面 PBC , $BC \subset$ 平面 PBC ,

$$\text{所以 } MN \parallel \text{平面 } PBC. \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

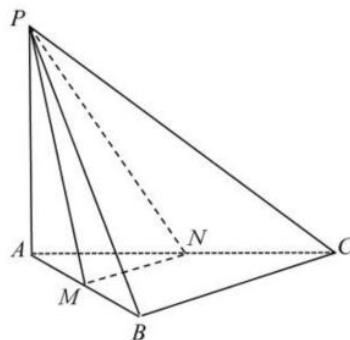
(2) 由 (1) 可知 $MN \parallel BC$,

又因为 $BC \perp AB$,

$$\text{所以 } MN \perp AB. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

因为 $PA \perp$ 平面 ABC , $MN \subset$ 平面 ABC ,

$$\text{所以 } PA \perp MN. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$



又因为 $AB, PA \subset$ 平面 PAB , $AB \cap PA = A$,

所以 $MN \perp$ 平面 PAB .

..... 10 分

因为 $MN \subset$ 平面 PMN ,

所以平面 $PMN \perp$ 平面 PAB .

..... 12 分

19. (12 分)

已知向量 $a = (\sqrt{3}\sin x, \cos x)$, $b = (\cos x, \cos x)$, 函数 $f(x) = a \cdot b - \frac{1}{2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 若 $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{3}{5}$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, 求 $\sin \alpha$.

解: (1) $f(x) = a \cdot b - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\sin x \cos x + \cos^2 x - \frac{1}{2}$ 2 分

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} - \frac{1}{2} = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

..... 4 分

$$\text{由 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{解得 } k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbf{Z}),$$

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right] \quad (k \in \mathbf{Z})$ 6 分

(2) $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{3}{5}$, 7 分

$$\text{因为 } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right),$$

$$\text{所以 } \alpha + \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{所以 } \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

..... 9 分

$$\text{所以 } \sin \alpha = \sin\left(\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\cos \frac{\pi}{6} - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\sin \frac{\pi}{6}$$

..... 11 分

$$= -\frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = -\frac{3\sqrt{3} + 4}{10}.$$

..... 12 分

20. (12 分)

某校知识竞赛分初赛、复赛两轮. 某班从甲、乙两名学生中选拔一人参加学校知识竞赛 (初赛), 抽取了两人 6 次模拟测试的成绩, 统计结果如下表:

	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	第 6 次
甲的成绩(分)	100	90	120	130	105	115
乙的成绩(分)	95	125	110	95	100	135

(1) 试根据以上数据比较两名同学的水平，并确定参加初赛的对象；

(2) 初赛要求如下：参赛者从 5 道试题中随机抽取 3 道作答，至少答对 2 道方可进入复赛。若某参赛者会 5 道中的 3 道，求该参赛者能进入复赛的概率。

解：(1) 由题意可得，

$$\bar{x}_{\text{甲}} = \frac{100+90+120+130+105+115}{6} = 110,$$

$$\bar{x}_{\text{乙}} = \frac{95+125+110+95+100+135}{6} = 110. \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$s_{\text{甲}}^2 = \frac{1}{6}[(100-110)^2 + (90-110)^2 + (120-110)^2 + (130-110)^2 + (105-110)^2 + (115-110)^2] = \frac{1050}{6} = 175,$$

$$s_{\text{乙}}^2 = \frac{1}{6}[(95-110)^2 + (125-110)^2 + 0 + (95-110)^2 + (100-110)^2 + (135-110)^2] = \frac{1400}{6} = \frac{700}{3}, \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \bar{x}_{\text{甲}} = \bar{x}_{\text{乙}}, \quad s_{\text{甲}}^2 < s_{\text{乙}}^2,$$

所以甲、乙的平均分相同，但甲的成绩比乙稳定，

故选甲参加知识竞赛较合适。 \dots\dots 6 \text{ 分}

(2) 在 5 道题中，参赛者会答的 3 道题分别记为 a, b, c ,

另外 2 道不会答的题分别记为 D, E .

记“参赛者进入复赛”为事件 A ,

参赛者从 5 道题中抽 3 道题的结果有 $(a, b, c), (a, b, D), (a, b, E),$

$(a, c, D), (a, c, E), (a, D, E), (b, c, D), (b, c, E), (b, D, E),$

(C, D, E) , 共 10 种. \dots\dots 8 \text{ 分}

进入复赛，即至少答对 2 道的情况有 $(a, b, c), (a, b, D), (a, b, E),$

$(a, c, D), (a, c, E), (b, c, D), (b, c, E)$, 共 7 种. \dots\dots 10 \text{ 分}

所以参赛者进入复赛的概率为 $P(A) = \frac{7}{10}$.

答：该参赛者进入复赛的概率为 $\frac{7}{10}$. \dots\dots 12 \text{ 分}

数学试卷 第 6 页 (共 10 页)

21. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\sqrt{3}b \sin A = a(1 + \cos B)$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $a=1$, $b=\sqrt{3}$, 点 M 在边 AC 上, 连接 BM 并延长至点 D , 且 $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$.

求 $\triangle ACD$ 面积的最大值及此时点 M 的位置.

解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 得 $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$.

因为 $\sqrt{3}b \sin A = a(1 + \cos B)$,

所以 $\sqrt{3} \sin B \sin A = \sin A(1 + \cos B)$ 2 分

因为 $0 < A < \pi$, 所以 $\sin A > 0$,

所以 $\sqrt{3} \sin B = 1 + \cos B$,

$$\sqrt{3} \sin B - \cos B = 2 \sin(B - \frac{\pi}{6}) = 1,$$

$$\sin(B - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}. \quad \text{..... 4 分}$$

因为 $0 < B < \pi$,

$$\text{所以 } -\frac{\pi}{6} < B - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6},$$

$$B - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6},$$

$$B = \frac{\pi}{3}. \quad \text{..... 5 分}$$

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, $a=1$, $b=\sqrt{3}$, 由 (1) 知 $B = \frac{\pi}{3}$.

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

$$\text{得 } \sin A = \frac{a}{b} \times \sin B = \frac{1}{2}.$$

因为 $a < b$, 所以 $A < B$,

$$\text{所以 } A = \frac{\pi}{6}, \quad C = \pi - A - B = \frac{\pi}{2}. \quad \text{..... 7 分}$$

在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $c^2 = a^2 + b^2 = 4$, 所以 $c=2$.

设 $AD=x$, $CD=y$.

在 $\triangle ACD$ 中, 由余弦定理 $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \times CD \times \cos \angle ADC$,

$$\text{得 } 3 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \frac{2\pi}{3} = x^2 + y^2 + xy.$$

$$\text{因为 } x^2 + y^2 + xy \geq 2xy + xy = 3xy,$$

$$\text{所以 } xy \leq 1, \text{ 所以 } S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}xy \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}xy \leq \frac{\sqrt{3}}{4},$$

当且仅当 $x = y = 1$ 时等号成立.

$$\text{所以 } \triangle ACD \text{ 面积的最大值为 } \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{在 } \triangle ACD \text{ 中, 因为 } AD = 1, CD = 1, \angle ADC = \frac{2\pi}{3}, \text{ 所以 } \angle ACD = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{在 } \triangle BCD \text{ 中, 因为 } \angle BCD = \frac{2\pi}{3}, CD = BC = 1, \text{ 所以 } \angle CBD = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{在 Rt}\triangle BCM \text{ 中, } CM = BC \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以点 M 在 AC 边上靠近 C 的三等分点.12 分

22. (12 分)

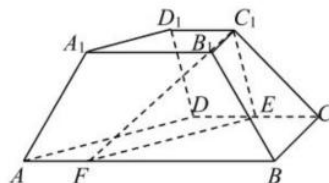
如图, 在四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB \parallel DC$, $BC \perp$ 侧面 ABB_1A_1 , $AB = 2$,

$AA_1 = A_1B_1 = BB_1 = BC = CD = 1$, E 为 CD 的中点, F 为棱 AB 上的点, $C_1F \parallel$ 平面 ADD_1A_1 .

(1) 证明: 平面 $C_1EF \parallel$ 平面 ADD_1A_1 ;

(2) 求 AF ;

(3) 求二面角 $C_1 - AB - C$ 的大小.



解: (1) 在四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,

因为 $AB = 2$, $A_1B_1 = CD = 1$,

$$\text{所以 } \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } C_1D_1 = \frac{1}{2}.$$

又因为 E 为 CD 的中点, 所以 $DE = \frac{1}{2}$.

四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $DE \parallel C_1D_1$,

所以四边形 C_1D_1DE 是平行四边形,

所以 $C_1E \parallel DD_1$ 2 分

又 $C_1E \not\subset$ 平面 ADD_1A_1 , $DD_1 \subset$ 平面 ADD_1A_1 ,

数学试卷 第 8 页 (共 10 页)

所以 $C_1E \parallel$ 平面 ADD_1A_1 3 分

又因为 $C_1F \parallel$ 平面 ADD_1A_1 , $C_1E \subset$ 平面 C_1EF , $C_1F \subset$ 平面 C_1EF , $C_1E \cap C_1F = C_1$,

所以平面 $C_1EF \parallel$ 平面 ADD_1A_1 4 分

(2) 由 (1) 知平面 $C_1EF \parallel$ 平面 ADD_1A_1 ,

又因为平面 $C_1EF \cap$ 平面 $ABCD = EF$, 平面 $ADD_1A_1 \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

所以 $AD \parallel EF$ 5 分

又因为 $AB \parallel CD$, 所以四边形 $ADEF$ 是平行四边形, 所以 $DE = AF$.

又由 (1) 知 $DE = \frac{1}{2}$, 所以 $AF = \frac{1}{2}$ 6 分

(3) 在梯形 ABB_1A_1 中, 过点 B_1 作 AB 的垂线,

垂足为 M , 连结 EM , C_1M .

因为 $A_1B_1 = AA_1 = BB_1 = 1$, $AB = 2$,

所以 $B_1M = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $BM = \frac{1}{2}$.

在梯形 $ABCD$ 中, 因为 $BM \parallel CE$, $BM = CE$,

所以四边形 $BCEM$ 是平行四边形,

所以 $BC \parallel EM$,

所以 $B_1C_1 \parallel BC \parallel EM$.

又因为 $BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , $AB \subset$ 平面 ABB_1A_1 ,

所以 $BC \perp AB$,

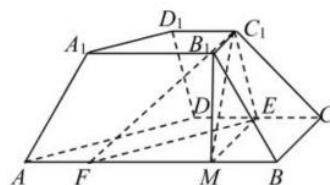
所以 $EM \perp AB$.

又因为 $B_1M \perp AB$, $EM \subset$ 平面 B_1C_1EM , $B_1M \subset$ 平面 B_1C_1EM , $EM \cap B_1M = M$,

所以 $AB \perp$ 平面 B_1C_1EM .

又因为 $C_1M \subset$ 平面 B_1C_1EM , 所以 $AB \perp C_1M$,

所以二面角 C_1-AB-C 的平面角是 $\angle C_1ME$ 9 分



因为 $BC=1$, $\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{1}{2}$, 所以 $B_1C_1=\frac{1}{2}$.

因为 $BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , $B_1M \subset$ 平面 ABB_1A_1 ,

所以 $BC \perp B_1M$.

因为 $BC \parallel B_1C_1 \parallel EM$,

所以 $B_1M \perp B_1C_1, B_1M \perp EM$.

在 $\text{Rt}\triangle B_1C_1M$ 中, $B_1C_1=\frac{1}{2}$, $B_1M=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\angle B_1MC_1=\frac{\pi}{6}$,

所以 $\angle C_1ME=\frac{\pi}{3}$.

所以二面角 C_1-AB-C 的大小是 $\frac{\pi}{3}$.

..... 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线