

参考答案及解析

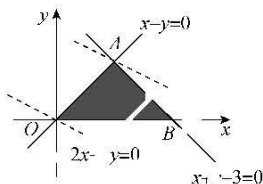
理科数学(一)

一、选择题

1. C 【解析】由已知得 $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$, 全集 $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, 故 $\complement_I(M \cup N) = \{0, 5, 7, 9\}$.

2. B 【解析】因为 $z = \frac{a+2i}{1+i} = \frac{(a+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{a+2}{2} + \frac{2-a}{2}i$, 所以 $\left(\frac{a+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2-a}{2}\right)^2 = 10$, 解得 $a = \pm 4$. 代入检验知, $a = -4$ 符合题意.

3. C 【解析】画出约束条件表示的可行域如图中阴影部分所示, 目标函数 $z = 2x + 3y$, 可化为 $y = -\frac{2}{3}x + \frac{z}{3}$, 当直线 $y = -\frac{2}{3}x + \frac{z}{3}$ 过点 A 时, 在 y 轴上的截距最大, 此时目标函数取得最大值. 又由 $\begin{cases} x+y-3=0, \\ x-y=0, \end{cases}$ 解得 $A\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, 所以目标函数 $z = 2x + 3y$ 的最大值为 $z_{\max} = 2 \times \frac{3}{2} + 3 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$.



4. A 【解析】由题意得 $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2x$, 令 $g(x) = f'(x)$, 则 $g'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} - 2 = 0$ (当且仅当 $x=0$ 时, 等号成立), 可知 $f'(x)$ 为增函数. 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > f'(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 故排除选项 BD; 又 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 故排除选项 C.

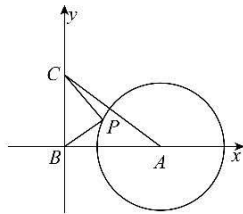
5. A 【解析】当 $0 < a < 1$ 时, 幂函数 $y = x^a$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 所以 $0.3^{0.2} > 0.2^{0.2}$; 当 $0 < a < 1$ 时, 指数函数 $y = a^x$ 在 \mathbf{R} 上是减函数, 所以 $0.2^{0.2} > 0.2^{0.3}$, 所以 $a > b$. 因为 $-\frac{1}{5 \ln 0.3} < -\frac{1}{5 \ln \frac{1}{3}} < -\frac{1}{5 \ln \frac{1}{e}} = \frac{1}{5} = 0.2 < 0.2^{0.3}$, 所以 $b > c$, 故 $a > b > c$.

6. B 【解析】因为 $S_{1023} - S_{1000} = a_{1001} + a_{1002} + \dots + a_{1023} = 23a_{1012} = 1$, 所以 $a_{1012} = \frac{1}{23}$, 故 $S_{2023} =$

$$\frac{a_1 + a_{2023}}{2} \times 2023 = a_{1012} \times 2023 = \frac{2023}{23}.$$

7. D 【解析】因为 $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 4$, 当且仅当 $x=y=2$ 时, 等号成立, 所以 A 正确; 因为 $\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 4$, 所以 $x^2+y^2 \geq 8$, 当且仅当 $x=y=2$ 时, 等号成立, 所以 B 正确; 因为 $\frac{x}{4-x} + \frac{y}{4-y} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2$, 当且仅当 $x=y=2$ 时等号成立, 所以 C 正确; 因为 $x^2 - 2y = x^2 - 2(4-x) = x^2 + 2x - 8 = (x+1)^2 - 9$, 又 $x+y=4$, 且 $x > 0, y > 0$, 所以 $0 < x < 4$, 因为函数 $f(x) = (x+1)^2 - 9$ 在区间 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x) \in (-8, 16)$, 所以 D 不正确.

8. B 【解析】如图, 以 B 为坐标原点, $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴的正方向, 建立平面直角坐标系, 则 $B(0, 0), A(\sqrt{7}, 0), C(0, 2)$. 设 $P(x, y)$, 则 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP} = x^2 + y^2 - 2y = x^2 + (y-1)^2 - 1$. 因为 $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{2}$, 所以 P 是圆 $A: (x-\sqrt{7})^2 + y^2 = 2$ 上的点. 又点 P 与点 $(0, 1)$ 距离的最大值为 $\sqrt{2} + \sqrt{7+1} = 3\sqrt{2}$, 即 $x^2 + (y-1)^2 \leq (3\sqrt{2})^2 = 18$, 所以 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP} \leq 17$. 故 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP}$ 的最大值为 17.



9. A 【解析】因为 $\sin 2x + \cos^2 x = 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{2\sin x \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{2\tan x + 1}{\tan^2 x + 1} = -\frac{3}{5}$, 整理得 $3\tan^2 x + 10\tan x + 8 = 0$, 解得 $\tan x = -2$ 或 $\tan x = -\frac{4}{3}$. 当 $\tan x = -2$ 时, $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2 \times (-2)}{1-(-2)^2} = \frac{4}{3}$; 当 $\tan x = -\frac{4}{3}$ 时, $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2 \times (-\frac{4}{3})}{1-(-\frac{4}{3})^2} = \frac{24}{7}$.

高考押题卷

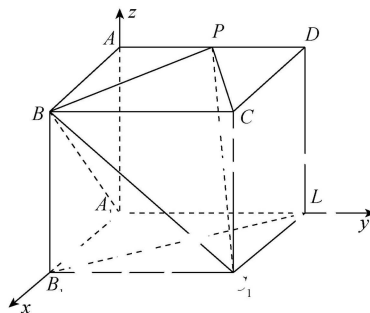
· 全国卷 ·

10. C 【解析】连接 AM . 由渐近线的定义, 得 $M(a, b)$. 由 $\angle FNA = 90^\circ$, 得 $|ON|^2 = |OF| \cdot |OA|$, 即 $|ON| = \sqrt{ac}$. 因为 $ON \parallel AM$, 所以 $\frac{|ON|}{|AM|} = \frac{|OF|}{|AF|}$, 即 $\frac{\sqrt{ac}}{b} = \frac{c}{c+a}$, 化简得 $c^2 - 2ac - a^2 = 0$, 两边同除以 a^2 , 得 $e^2 - 2e - 1 = 0$, 解得 $e = 1 + \sqrt{2}$ ($1 - \sqrt{2}$ 舍去).

11. A 【解析】因为 $a_{n+1} + a_n = 2n + 1$, 所以 $a_{n+1} - (n+1) = -(a_n - n)$, 且 $a_1 - 1 = -2$, 即 $\{a_n - n\}$ 是以 -2 为首项, -1 为公比的等比数列, 所以 $a_n - n = -2 \cdot (-1)^{n-1} = 2 \times (-1)^n$, 即 $a_n = n + 2 \times (-1)^n$. 当 n 为偶数时, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, 当 n 为奇数时, $S_n = \frac{n(n+1)}{2} - 2$. 又 $S_{n+1} + S_n = 2S_n + a_{n+1}$, 当 n 为偶数时, 由 $2S_n + a_{n+1} = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) + 2 \times (-1)^{n+1} = 2 \times 399$, 得 $n^2 + 2n - 2 \times 400 = 0$, 解得 $n = 48$ 或 $n = -50$ (舍去); 当 n 为奇数时, 由 $2S_n + a_{n+1} = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - 4 + (n+1) + 2 \times (-1)^{n+1} = 2 \times 399$, 得 $n^2 + 2n - 2 \times 400 = 0$, 解得 $n = 48$ (舍去) 或 $n = -50$ (舍去). 综上所述, $n = 48$.

12. C 【解析】以 A_1 为坐标原点, 分别以 A_1B_1, A_1D_1, A_1A 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 设正方体的棱长为 1, $P(0, a, 1), a \in [0, 1]$, 则 $\vec{A_1B} = (1, 0, 1), \vec{C_1P} = (0, a, 1) - (1, 1, 0) = (-1, a-1, 1)$. 因为 $\vec{A_1B} \cdot \vec{C_1P} = (1, 0, 1) \cdot (-1, a-1, 1) = -1 + 0 + 1 = 0$, 所以 $A_1B \perp PC_1$, 故 ① 正确; 因为 $\vec{B_1D_1} = (0, 1, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 0)$, 所以 $\cos \langle \vec{C_1P}, \vec{B_1D_1} \rangle = \frac{\vec{C_1P} \cdot \vec{B_1D_1}}{|\vec{C_1P}| |\vec{B_1D_1}|} = \frac{a}{\sqrt{2} \times \sqrt{2+(a-1)^2}} = \frac{a}{\sqrt{2} \times \sqrt{a^2-2a+3}}$, 当 $a=0$ 时, $\cos \langle \vec{C_1P}, \vec{B_1D_1} \rangle = 0$, 所以此时异面直线 C_1P 与 B_1D_1 所成的角为 $\frac{\pi}{2}$; 当 $a \in (0, 1]$ 时, $\frac{a}{\sqrt{2} \times \sqrt{a^2-2a+3}} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{1-\frac{2}{a}+\frac{3}{a^2}}}$. 令 $f(a) = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{1-\frac{2}{a}+\frac{3}{a^2}}}$, $\frac{1}{a} \in [1, +\infty)$, 则 $f(a) \in (0, \frac{1}{2}]$, 所以 $\cos \langle \vec{C_1P}, \vec{B_1D_1} \rangle \in (0, \frac{1}{2}]$, 所以异面直线 C_1P 与 B_1D_1 所成角的取值范围为 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$. 综上所述可知异面直线 C_1P 与 B_1D_1 所成角的取值范围为 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$, 故 ② 正确; 若 $BP \perp$ 平面 CC_1P , 则 $BP \perp$

CP , 因为 $\vec{CP} = (0, a, 1) - (1, 1, 1) = (-1, a-1, 0)$, $\vec{BP} = (0, a, 1) - (1, 0, 1) = (-1, a, 0)$, 所以 $\vec{BP} \cdot \vec{CP} = (-1, a, 0) \cdot (-1, a-1, 0) = 1 + a^2 - a = 0$, 因为方程 $a^2 - a + 1 = 0$ 无实数解, 所以 $BP \perp CP$ 不成立, 故 ③ 不正确; 因为 $V_{\text{三棱锥}B-PCC_1} = V_{\text{三棱锥}P-BCC_1} = \frac{1}{3} S_{\triangle BCC_1} \times DC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$, 故 ④ 正确.



二、填空题

13. -3 【解析】由条件可知, $f'(x) = 2x + 2f'(1) + \frac{1}{x}$, 则 $f'(1) = 2 + 2f'(1) + 1$, 解得 $f'(1) = -3$.
14. -100 【解析】因为 $(x-2y)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = (-2)^r C_6^r x^{6-r} y^r$, 所以 $(x+y)(x-2y)^6$ 的展开式中含 $x^4 y^3$ 项的系数为 $(-2)^3 C_6^3 + (-2)^2 C_6^2 = -100$.
15. 0 【解析】根据题意, $f(x+1)$ 为奇函数, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 故 $f(1) = 0$. 又因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(-x+1) = -f(x+1) = f(x-1)$, 则 $f(x+2) = -f(x)$, 所以 $f(x+4) = f(x)$, 即 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数. 所以 $f(2023) = f(4 \times 506 - 1) = f(-1) = f(1) = 0$.
16. 1 【解析】设 $A(x_1, \frac{x_1^2}{2p}), B(x_2, \frac{x_2^2}{2p})$, 显然, 直线 AB 的斜率存在, 且 $k = \frac{\frac{x_2^2}{2p} - \frac{x_1^2}{2p}}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 + x_1}{2p}$, 则直线 AB 的方程为 $y = \frac{x_1 + x_2}{2p} x + 2$. 联立 $\begin{cases} y = \frac{x_1 + x_2}{2p} x + 2 \\ x^2 = 2py \end{cases}$, 整理得 $x^2 - (x_1 + x_2)x - 4p = 0$, 则 $x_1 x_2 = -4p$, 由 $x^2 = 2py$, 得 $y = \frac{x^2}{2p}$, 求得 $y' = \frac{x}{p}$, 故切线 AM 的方程为 $y - \frac{x_1^2}{2p} = \frac{x_1}{p}(x - x_1)$, 即 $y = \frac{x_1}{p} x - \frac{x_1^2}{2p}$ ①, 同理可得切线 BM 的方程为 $y = \frac{x_2}{p} x - \frac{x_2^2}{2p}$ ②, 两式相减, 得 M 的横坐标 $a = \frac{x_1 + x_2}{2}$, 两式相加, 得 M 的纵坐标 $b = \frac{x_1 + x_2}{2p} x - \frac{x_1^2 + x_2^2}{4p} = \frac{(x_1 + x_2)^2}{4p} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{4p} =$

·理科数学·

参考答案及解析

$$\frac{2x_1x_2}{4p} = \frac{-8p}{4p} = -2. \text{由 } a+b=-1, \text{得 } a=1, \text{所以}$$

$$M(1, -2), l_{AB}: y = \frac{1}{p}x + 2, \text{即 } x - py + 2p = 0, \text{所以}$$

$$\text{点 } M \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离 } d = \frac{|1+4p|}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}, \text{所以}$$

$$7p^2 + 16p - 23 = 0, \text{解得 } p=1 \text{ 或 } p = -\frac{23}{7} \text{ (舍去).}$$

三、解答题

17. 解:(1)由题意知 $AB=c=2b, AD = \frac{\sqrt{17}}{6}c = \frac{\sqrt{17}}{3}b,$

$$BD = \frac{a}{3}.$$

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理, 得 $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{4b^2 + a^2 - b^2}{2 \times 2b \times a} = \frac{a^2 + 3b^2}{4ab},$ (3分)

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理, 得 $\cos B =$

$$\frac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2AB \cdot BD} = \frac{4b^2 + \frac{a^2}{9} - \frac{17}{9}b^2}{2 \times 2b \times \frac{a}{3}} = \frac{a^2 + 19b^2}{12ab},$$

$$\text{则 } \frac{a^2 + 3b^2}{4ab} = \frac{a^2 + 19b^2}{12ab}, \text{整理得 } a^2 = 5b^2,$$

$$\text{所以 } b^2 + c^2 = a^2, \text{故 } \angle BAC = 90^\circ. \quad (6 \text{分})$$

(2)由 $a = \sqrt{5}$ 及(1), 得 $b=1, c=2,$ 则 $\cos C = \frac{\sqrt{5}}{5}.$

在 $\triangle AEC$ 中, $CE = \frac{\sqrt{5}}{3},$ 由余弦定理, 得 $AE^2 = AC^2 +$

$$CE^2 - 2AC \cdot CE \cos C = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{8}{9}, \text{则 } AE = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad (9 \text{分})$$

由正弦定理, 得 $\frac{AC}{\sin \angle AEC} = \frac{AE}{\sin C},$

$$\text{则 } \sin \angle AEC = \frac{AC}{AE} \cdot \sin C = \frac{3}{2\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

故 $\triangle ADE$ 的外接圆的直径为 $2R = \frac{AD}{\sin \angle AED} =$

$$\frac{\frac{\sqrt{17}}{6}c}{\frac{3\sqrt{10}}{10}} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{6} \times 2}{\frac{3\sqrt{10}}{10}} = \frac{\sqrt{170}}{9}. \quad (12 \text{分})$$

18. 解:(1)由题意可知, 注射甲药物的患者共 100 人, 治疗效果明显的有 76 人, 故注射甲药物治疗效果明显的

$$\text{的概率为 } P_1 = \frac{76}{100} = \frac{19}{25}; \quad (2 \text{分})$$

注射乙药物的患者共 100 人, 治疗效果明显的有 84

$$\text{人, 故注射乙药物治疗效果明显的概率为 } P_2 = \frac{84}{100} =$$

$$\frac{21}{25}. \quad (4 \text{分})$$

(2)由表中的数据可知,

$$K^2 = \frac{200 \times (76 \times 16 - 84 \times 24)^2}{160 \times 40 \times 100 \times 100} = 2. \quad (6 \text{分})$$

因为 $2 < 2.706,$

所以没有 90% 的把握认为甲、乙两种药物对治疗该种疾病的效果有差异. (7分)

(3)从样本中对甲、乙两种药物治疗效果不明显的患者中按分层抽样的方法抽出 5 名患者, 则应从甲、乙两种药物治疗效果不明显的患者中分别抽取 3 人, 2 人,

随机变量 X 的所有可能取值为 1, 2, 3, (8分)

$$\text{则 } P(X=1) = \frac{C_3^1 C_2^4}{C_5^5} = \frac{3}{10}, P(X=2) = \frac{C_2^1 C_3^4}{C_5^5} = \frac{3}{5},$$

$$P(X=3) = \frac{C_2^3 C_3^2}{C_5^5} = \frac{1}{10}, \quad (10 \text{分})$$

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

(11分)

$$\text{故 } E(X) = 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{5}. \quad (12 \text{分})$$

19. 解:(1)因为四边形 $ABCD$ 是菱形, 所以 $AB \parallel CD,$

又 $CD \subset$ 平面 $CDEG, AB \not\subset$ 平面 $CDEG,$

所以 $AB \parallel$ 平面 $CDEG.$

同理可得 $AF \parallel$ 平面 $CDEG.$

又 $AB \cap AF = A, AB, AF \subset$ 平面 $ABF,$

所以平面 $ABF \parallel$ 平面 $CDEG.$

又平面 $BGEF \cap$ 平面 $CDEG = EG,$ 平面 $BGEF \cap$ 平面 $ABF = BF,$

所以 $EG \parallel BF.$

同理可得 $BG \parallel EF.$

所以四边形 $BGEF$ 是平行四边形. (2分)

如图, 连接 FG, BE 交于点 $M,$ 连接 AC, BD 交于点 $N,$ 连接 $MN.$ 设 $AF = a, CG = b,$ 则 $DE = 2MN =$

$AF + CG = a + b.$ 延长 EG, DC 交于点 $Q,$ 连接 $BQ.$

因为 $AH \parallel$ 平面 $BGEF, AH \subset$ 平面 $ABQD,$ 平面 $ABQD \cap$ 平面 $BQEF = BQ,$

所以 $AH \parallel BQ.$

又 $AB \parallel HQ,$ 所以四边形 $AHQB$ 为平行四边形, 则 $HQ = AB = CD.$

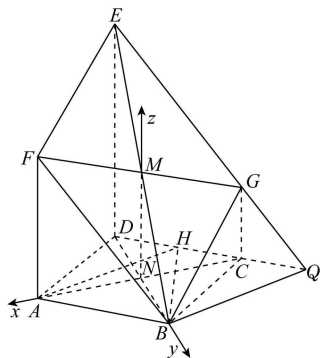
因为 H 为 CD 的中点, 所以 $QC = CH = HD.$ (4分)

$$\text{因为 } CG \parallel DE, \text{所以 } \frac{CG}{DE} = \frac{QC}{QD} = \frac{1}{3},$$

$$\text{即 } \frac{b}{a+b} = \frac{1}{3}, \text{得 } a = 2b, \text{即 } \frac{AF}{CG} = 2. \quad (5 \text{分})$$

高考押题卷

· 全国卷 ·



(2)由(1)知, MN, AC, BD 两两垂直, 故以 N 为坐标原点, $\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NM}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系如图所示, 则 $B(0, 1, 0)$,

$$H\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), F(\sqrt{3}, 0, 2), G(-\sqrt{3}, 0, 1), \text{ 所以}$$

$$\overrightarrow{BF} = (\sqrt{3}, -1, 2), \overrightarrow{BG} = (-\sqrt{3}, -1, 1), \overrightarrow{BH} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right). \quad (7 \text{分})$$

设平面 $BGEF$ 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BF} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BG} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \sqrt{3}x - y + 2z = 0, \\ -\sqrt{3}x - y + z = 0. \end{cases}$$

取 $x = \sqrt{3}$, 得 $y = -9, z = -6$, 则 $\mathbf{m} = (\sqrt{3}, -9, -6)$ 是平面 $BGEF$ 的一个法向量. (9分)

故直线 BH 与平面 $BGEF$ 所成角的正弦值为

$$|\cos\langle \mathbf{m}, \overrightarrow{BH} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BH}|}{|\mathbf{m}| |\overrightarrow{BH}|} = \frac{\left| -\frac{3}{2} + \frac{27}{2} \right|}{\sqrt{120} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{10}}{5}. \quad (12 \text{分})$$

20. (1)证明: 因为 $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2} = (x-1)e^x - \frac{x^2}{2}$, 所

$$\text{以 } g'(x) = xe^x - x = x(e^x - 1), \quad (1 \text{分})$$

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $e^x - 1 < 0$, 则 $x(e^x - 1) > 0$;

当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $e^x - 1 \geq 0$, 则 $x(e^x - 1) \geq 0$,

所以 $g'(x) \geq 0$ 恒成立,

故 $g(x)$ 是增函数. (4分)

(2)解: 设 $m(x) = \ln(x+1) - x, x > 0$,

$$\text{则 } m'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = -\frac{x}{x+1} < 0,$$

所以 $m(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为减函数,

则 $m(x) < m(0) = 0$, 即 $\ln(x+1) < x$.

因为 $f'(x) = xe^x$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $e^x > 1$, 所以 $x < f'(x)$.

故当 $a \leq 1$ 时, $a \ln(x+1) \leq \ln(x+1) < x < f'(x)$, 则 $f'(x) > a \ln(x+1)$; (6分)

当 $a > 1$ 时, 设 $F(x) = f'(x) - a \ln(x+1) = xe^x - a \cdot$

$$\ln(x+1), \text{ 则 } F'(x) = (x+1)e^x - \frac{a}{x+1} = (x+1) \left[e^x - \frac{a}{(x+1)^2} \right].$$

$$\frac{a}{(x+1)^2} \Big].$$

因为 $F'(0) = 1 - a < 0$,

$$F'(\sqrt{a}-1) = \sqrt{a}(e^{\sqrt{a}-1} - 1) > 0,$$

所以存在 $x_0 \in (0, \sqrt{a}-1)$, 使得 $F'(x_0) = 0$.

易知 $F'(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 所以当 $x \in (0, x_0)$ 时, $F'(x) < 0$, $F(x)$ 在区间 $(0, x_0)$ 上单调递减, 则 $F(x) < F(0) = 0$, 即 $f'(x) < a \ln(x+1)$, 不符合题意,

故 $a \leq 1$. (8分)

$$\text{设 } p(x) = a \ln(x+1) - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \ln 3 - \frac{1}{x} \right) = a \ln(x+1) + \frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \ln 3, x > 0,$$

$$\text{则 } p'(x) = \frac{a}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{ax^2 - x - 1}{(x+1)x^2}.$$

令 $p'(x) = 0$, 则 $ax^2 - x - 1 = 0$,

当 $a \leq 0$ 时, $p(1) < 0$, 不符合题意, 故 $0 < a \leq 1$.

此时, 方程 $ax^2 - x - 1 = 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内只有一个实数根, 记为 x_1 .

当 $x \in (0, x_1)$ 时, $p'(x) < 0$, $p(x)$ 单调递减; 当 $x \in (x_1, +\infty)$ 时, $p'(x) > 0$, $p(x)$ 单调递增, 则 $p(x_1)$ 为 $p(x)$ 的最小值,

故 $p(x) \geq 0$ 恒成立, 当且仅当 $p(x_1) = a \ln(x_1+1) +$

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \ln 3 \geq 0.$$

将 $a = \frac{x_1+1}{x_1^2}$ 代入 $p(x_1)$, 得 $p(x_1) = \frac{(x_1+1)\ln(x_1+1)}{x_1^2} +$

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \ln 3. \quad (10 \text{分})$$

$$\text{设 } q(x) = \frac{(x+1)\ln(x+1)}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \ln 3, x > 0,$$

$$\text{则 } q'(x) = \frac{x^2[1+\ln(x+1)] - 2x(x+1)\ln(x+1)}{x^4} - \frac{1}{x^2} = \frac{-(x+2)\ln(x+1)}{x^3} < 0,$$

所以 $q(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为减函数. (11分)

因为 $x_1 = 2$ 时, $a = \frac{3}{4}, q(2) = 0$, 所以当 $0 < x \leq 2$ 时, $q(x) \geq 0$.

$$\text{设 } t(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}, \text{ 则 } t'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3},$$

所以当 $x \in (0, 2]$ 时, $t'(x) < 0$, 则 $t(x)$ 在区间 $(0, 2]$

上单调递减, 则 $t(x) \geq t(2) = \frac{3}{4}$.

$$\text{因为 } a = \frac{x_1+1}{x_1^2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1^2}, x_1 \in (0, 2],$$

所以 $a \geq \frac{3}{4}$.

又 $0 < a \leq 1$, 所以 $\frac{3}{4} \leq a \leq 1$.

·理科数学·

参考答案及解析

故实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$. (12分)

21. 解:(1)由题意设圆 M 的半径为 r , 则 $|MO_1|=r+\frac{1}{2}$,

$|MO_2|=\frac{7}{2}-r$, 所以 $|MO_1|+|MO_2|=4>|O_1O_2|=2$, (2分)

故圆心 M 的轨迹是以 $O_1(-1,0), O_2(1,0)$ 为焦点, 4 为长轴长的椭圆,

所以 $c=1, a=2$, 则 $b^2=3$,

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. (4分)

(2)设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), Q(x_0, y_0)$, 直线 AB 的方程为 $y=kx+t$. 将 $y=kx+t$ 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, 整理

$$\text{得 } (3+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-12=0,$$

$$\Delta=(8kt)^2-4(3+4k^2)(4t^2-12)>0,$$

$$\text{即 } 4k^2-t^2+3>0,$$

$$\text{则 } x_1+x_2=-\frac{8kt}{3+4k^2}, x_1x_2=\frac{4t^2-12}{3+4k^2},$$

$$\text{所以 } |x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$=\frac{\sqrt{64k^2t^2-4(3+4k^2)(4t^2-12)}}{3+4k^2}$$

$$=\frac{\sqrt{48(3+4k^2-t^2)}}{3+4k^2},$$

$$\text{故 } |AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{48(3+4k^2-t^2)}}{3+4k^2}.$$

$$\text{又原点 } O \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离为 } d=\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|\times d$$

$$=\frac{\sqrt{1+k^2}\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{3+4k^2-t^2}}{3+4k^2}\times\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\times\sqrt{(3+4k^2-t^2)t^2}}{3+4k^2} \quad (6分)$$

$$\leq\frac{2\sqrt{3}\times\frac{3+4k^2-t^2+t^2}{2}}{3+4k^2}=\sqrt{3},$$

当且仅当 $3+4k^2-t^2=t^2$, 即 $3+4k^2=2t^2$ (*) 时, 等号成立.

$$\text{由 } \vec{OQ}=\lambda\vec{OA}+\mu\vec{OB}, \text{ 得 } \begin{cases} x_0=\lambda x_1+\mu x_2, \\ y_0=\lambda y_1+\mu y_2, \end{cases}$$

$$\text{代入 } \frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1, \text{ 整理得 } \lambda^2\left(\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}\right)+\mu^2\left(\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}\right)+2\lambda\mu\left(\frac{x_1x_2}{4}+\frac{y_1y_2}{3}\right)=1,$$

$$\text{即 } \lambda^2+\mu^2+2\lambda\mu\left(\frac{x_1x_2}{4}+\frac{y_1y_2}{3}\right)=1 \quad (**). \quad (8分)$$

$$\text{而 } \frac{x_1x_2}{4}+\frac{y_1y_2}{3}=\frac{x_1x_2}{4}+\frac{(kx_1+t)(kx_2+t)}{3}$$

$$=\frac{(3+4k^2)x_1x_2+4kt(x_1+x_2)+4t^2}{12}$$

$$=\frac{(3+4k^2)\times\frac{4t^2-12}{3+4k^2}+4kt\times\left(-\frac{8kt}{3+4k^2}\right)+4t^2}{12}$$

$$=\frac{2t^2-(3+4k^2)}{3+4k^2},$$

由(*)可知 $\frac{x_1x_2}{4}+\frac{y_1y_2}{3}=0$, 代入(**)式得 $\lambda^2+\mu^2=1$.

故 $\lambda^2+\mu^2$ 的值为 1. (12分)

22. 解:(1)由 $\begin{cases} x=3+2\cos\alpha, \\ y=1+2\sin\alpha \end{cases}$ 得 $(x-3)^2+(y-1)^2=4$,

所以 C 的普通方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=4$. (2分)

$$\text{将 } \begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \text{ 代入 } 3\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+3=0 \text{ 中,}$$

$$\text{得 } 3x-4y+3=0,$$

$$\text{所以 } l \text{ 的直角坐标方程为 } 3x-4y+3=0. \quad (4分)$$

(2)由题知圆 C 的圆心 $(3,1)$, 半径 $R=2$.

设点 P 到直线 l 的距离为 d ,

$$\text{则 } d=\frac{|3\times 2-4\times 1+3|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{9}{5}. \quad (6分)$$

设圆心 C 到直线 l 的距离为 h ,

$$\text{则 } h=\frac{|3\times 3-4\times 1+3|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{8}{5}, \quad (7分)$$

$$\text{则 } |AB|=2\sqrt{R^2-h^2}=2\sqrt{4-\frac{64}{25}}=\frac{12}{5}, \quad (9分)$$

$$\text{所以 } S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times|AB|\times d=\frac{1}{2}\times\frac{12}{5}\times\frac{9}{5}=\frac{54}{25}.$$

(10分)

23. (1)解:因为 $|x+m|+|x+2|\geq|x+m-x-2|=|m-2|$, 当且仅当 $(x+m)(x+2)\leq 0$ 时, 等号成立.

(2分)

由题得 $|m-2|\geq 3$, 解得 $m\geq 5$ 或 $m\leq -1$. (4分)

因为 $m>0$, 所以 $m\geq 5$, 所以 $M=5$. (5分)

(2)证明:由(1)知 $2a+b+c=5$, 所以 $(a+b)+(a+c)=5$, (6分)

$$\text{所以 } \frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}=\frac{1}{5}[(a+b)+(a+c)]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(2+\frac{a+c}{a+b}+\frac{a+b}{a+c}\right)\geq\frac{1}{5}\left(2+2\sqrt{\frac{a+c}{a+b}\cdot\frac{a+b}{a+c}}\right)=\frac{4}{5}, \quad (9分)$$

当且仅当 $\frac{a+c}{a+b}=\frac{a+b}{a+c}$, 即 $b=c$ 时, 等号成立,

$$\text{故 } \frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\geq\frac{4}{5}. \quad (10分)$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



Q 自主选拔在线

