济宁市 2023 年高考模拟考试

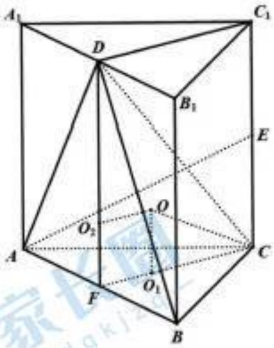
数学试题参考答案

2023.03

一、选择题：每小题 5 分，共 40 分.

1.C　2.B　3.D　4.C　5.C　6.D　7.A　8.B

8. 解析：如图，因为 D 为线段 A_1B_1 的中点，且 $AD\perp DC_1$



所以 $C_1A_1=C_1B_1=CA=CB=\sqrt{3}$

因为 E 为线段 CC_1 的中点且 A_1E 过 $\triangle AC_1E$ 的内切圆圆心.

所以 $\angle AEC=\frac{\pi}{3}$.

所以 $CC_1=2C_1E=2EC=2$.

取 AB 的中点 F，连接 CF、DF，分别在 CF、DF 上取 $\triangle CAB$、$\triangle DAB$ 的外接圆圆心 O_1、O_2，

过 O_1、O_2 分别作平面 CAB、平面 DAB 的垂线，两垂线交于点 O，则点 O 为三棱锥 $D-ABC$ 的外接球球心.

在 $\triangle CAB$ 中由余弦定理得：$\cos\angle ACB=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\frac{\sqrt{3}^2+\sqrt{3}^2-2^2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$

所以 $\sin\angle ACB=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

设 $\triangle CAB$、$\triangle DAB$ 的外接圆半径分别为 r_1、r_2，三棱锥 $D-ABC$ 的外接球半径为 R.

$2r_1=\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{2}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$ 解得：$r_1=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

同理：$r_2=\frac{5}{4}$

所以 $OO_1=O_2F=\frac{3}{4}$

所以 $R^2=OC^2=OO_1^2+O_1C^2=(\frac{3\sqrt{2}}{4})^2+(\frac{3}{4})^2=\frac{27}{16}$

所以三棱锥 $D-ABC$ 的外接球表面积为 $S_{球O}=4\pi R^2=4\pi\times\frac{27}{16}=\frac{27}{4}\pi$

故选 B.

二、多选题：每小题 5 分，共 20 分. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9. BC　10. AC　11. ABD　12. BD

三、填空题：每小题 5 分，共 20 分.

13. $\frac{3}{2}$　　14. 10　　15. $\frac{9}{16}$　　16. e^2

16. 解析：设函数 $f(x)$ 在 $[\frac{e}{3},e]$ 上的零点为 m.

则 $a\sqrt{m^2-\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}b-e^m=0$

所以点 $P(a,b)$ 在直线 $l:\sqrt{m^2-\frac{1}{2}}\cdot x+\frac{\sqrt{2}}{2}y-e^m=0$ 上.

设 O 为坐标原点，则 $a^2+b^2=|OP|^2$，其最小值就是 O 到直线 l 的距离的平方

所以 $\sqrt{a^2+b^2}=|OP|\geqslant\frac{e^m}{\sqrt{m^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}=\frac{e^m}{m}$

设 $g(m)=\frac{e^m}{m}$，$m\in[\frac{e}{3},e]$. 则 $g'(m)=\frac{e^m(m-1)}{m^2}$.

所以 $g(m)$ 在 $[\frac{e}{3},1)$ 单调递减，在 $(1,e]$ 单调递增.

所以 $g(m)_{mim}=g(1)=e$.

$a^2+b^2\geqslant e^2$.

所以 a^2+b^2 的最小值为 e^2

四、解答题：共 6 小题，共 70 分.

17. 解：(1) 由正弦定理得：$(c-a)(c+a)=b(c-b)$ ………………………… 2 分

所以 $c^2-a^2=bc-b^2$　即 $b^2+c^2-a^2=bc$ ………………………… 3 分

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$ ………………………… 4 分

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$ ………………………… 5 分

(2) 因为 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$， ………………………… 6 分

又因为 $b<a$，所以 $B<A$，所以 $\cos B>0$，所以 $\cos B=\frac{\sqrt{6}}{3}$， ………………………… 7 分

所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$ ………………………… 9 分

故 $h=b\sin C=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$ ………………………… 10 分

18. 解：(1) 由已知得：$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{8}x_i}{8}=75$，$\overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{8}y_i}{8}=74$ ………………………… 2 分

$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{43837.2-8\times75\times74}{93.8}=-6$，…………………… 3 分

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=74+6\times75=524$

所以 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=-6x+524$ …………………… 4 分

(2)由(1)得：当 $x=84$ 时，$\hat{y}=-6\times84+524=20$

所以 2024 年顾客对该市航空公司投诉的次数约为 20 …………………… 6 分

(3)由题意知：$X\sim B(4,\frac{1}{2})$ …………………… 7 分

X 的所有可能的取值为 0,1,2,3,4，…………………… 8 分

$P(X=0)=C_4^0(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$　　$P(X=1)=C_4^1(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{4}$　　$P(X=2)=C_4^2(\frac{1}{2})^4=\frac{3}{8}$

$P(X=3)=C_4^3(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{4}$　　$P(X=4)=C_4^4(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$ …………………… 10 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

…………………… 11 分

$E(X)=np=4\times\frac{1}{2}=2$ …………………… 12 分

19.(1)证明：因为 $na_{n+1}=2S_n+n$　①

当 $n=1$ 时，$a_2=2S_1+1=3$. …………………… 1 分

当 $n\geq2$ 时，$(n-1)a_n=2S_{n-1}+n-1$　②

①－②得：$na_{n+1}-(n-1)a_n=2a_n+1$　即：$na_{n+1}=(n+1)a_n+1$ …………………… 2 分

所以 $na_{n+1}+n=(n+1)a_n+1+n$　即：$n(a_{n+1}+1)=(n+1)(a_n+1)$

所以 $\dfrac{a_{n+1}+1}{n+1}=\dfrac{a_n+1}{n}$，$n\geq2$ …………………… 4 分

又当 $n=1$ 时，$\dfrac{a_2+1}{2}=\dfrac{a_1+1}{1}$ …………………… 5 分

故数列 $\left\{\dfrac{a_n+1}{n}\right\}$ 为常数列 …………………… 6 分

(2)由(1)可知：$\dfrac{a_n+1}{n}=\dfrac{a_1+1}{1}=2$

所以 $a_n=2n-1$ …………………… 8 分

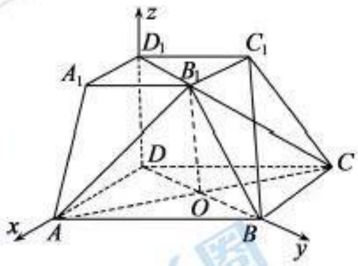
所以 $T_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{3^3}+\dfrac{5}{3^5}+\cdots+\dfrac{2n-3}{3^{2n-3}}+\dfrac{2n-1}{3^{2n-1}}$　③

$\frac{1}{3^2}T_n=\frac{1}{3^3}+\frac{3}{3^5}+\frac{5}{3^7}+\cdots+\frac{2n-3}{3^{2n-1}}+\frac{2n-1}{3^{2n+1}}$ ④ …………………… 9 分

③－④得：$\frac{8}{9}T_n=\frac{1}{3}+2(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^5}+\cdots+\frac{1}{3^{2n-3}}+\frac{1}{3^{2n-1}})-\frac{2n-1}{3^{2n+1}}$ …………………… 10 分

解得：$T_n=\frac{1}{32}(15-\frac{8n+5}{3^{2n-1}})$. …………………… 12 分

20.（1）证明：连接 BD 交 AC 于点 O，连接 OB_1，B_1D_1.



由题意得：$DO\parallel D_1B_1$ 且 $DO=D_1B_1$

所以四边形 DOB_1D_1 为平行四边形.

所以 $D_1D\parallel B_1O$ …………………… 2 分

又 $D_1D\not\subset$ 平面 AB_1C，$B_1O\subset$ 平面 AB_1C.

所以 $DD_1\parallel$ 平面 AB_1C. …………………… 4 分

（2）因为 $B_1A=B_1C$，$OA=OC$.

所以 $B_1O\perp AC$.

又平面 $AB_1C\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $AB_1C\cap$ 平面 $ABCD=AC$，$B_1O\subset$ 平面 AB_1C

所以 $B_1O\perp$ 平面 $ABCD$.

又 $D_1D\parallel B_1O$，所以 $D_1D\perp$ 平面 $ABCD$. …………………… 5 分

又在 $\triangle ABD$ 中，$AB=4$，$AD=2$，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$

所以 $BD=2\sqrt{3}$，$AD\perp DB$. …………………… 6 分

所以 DA，DB，DD_1 两两垂直. 以 $\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 为 x 轴，y 轴，z 轴正方向，建立空间直角坐标系.

则 $A(2,0,0)$，$B_1(0,\sqrt{3},2)$，$C(-2,2\sqrt{3},0)$，$B(0,2\sqrt{3},0)$，$C_1(-1,\sqrt{3},2)$ …………………… 7 分

所以 $\overrightarrow{BC_1}=(-1,-\sqrt{3},2)$，$\overrightarrow{AB_1}=(-2,\sqrt{3},2)$，$\overrightarrow{AC}=(-4,2\sqrt{3},0)$. …………………… 8 分

设平面 AB_1C 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ 即：$\begin{cases}-2x+\sqrt{3}y+2z=0\\ -4x+2\sqrt{3}y=0\end{cases}$

令 $x=\sqrt{3}$，则 $y=2$，$z=0$.

所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},2,0)$ …………………… 10 分

设 BC_1 与平面 AB_1C 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{BC_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{BC_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BC_1}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{42}}{28}$ …………………… 11 分

故直线 BC_1 与平面 AB_1C 所成角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{42}}{28}$ …………………… 12 分

21. 解：(1)由 $\begin{cases}x+y+1=0\\x^2=2py\end{cases}$

消去 y 得 $x^2+2px+2p=0$；………………………………………… 1分

又因为 $x+y+1=0$ 与 $x^2=2py$ 相切.

所以 $\triangle=4p^2-8p=0$.

解得：$p=2$ 或 $p=0$(舍去) ………………………………………… 2分

当 $p=2$ 时，$x^2+4x+4=0$.

解得：$x=-2$，所以 $y=1$. ………………………………………… 3分

故抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$，A 的坐标为 $(-2,1)$ …………………… 4分

(2)显然直线 l 的斜率存在.

可设为：$y=kx+b$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$

由 $\begin{cases}y=kx+b\\x^2=4y\end{cases}$ 消去 y 得：$x^2-4kx-4b=0$. $\triangle=16k^2+16b>0$.

$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4b$. ………………………………………… 6分

$\overrightarrow{AM}=(x_1+2,y_1-1)$，$\overrightarrow{AN}=(x_2+2,y_2-1)$.

因为以 MN 为直径的圆过点 A.

所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$.

即：$(x_1+2)\cdot(x_2+2)+(y_1-1)\cdot(y_2-1)=0$ …………………………… 7分

整理得：$(k^2+1)x_1x_2+[k(b-1)+2](x_1+x_2)+(b-1)^2+4=0$.

所以 $-4b(k^2+1)+4k^2(b-1)+8k+(b-1)^2+4=0$

化简得：$b^2-6b+5=4k^2-8k$.

所以 $(b-3)^2=(2k-2)^2$.

所以 $b-3=2k-2$ 或 $b-3=2-2k$.

即：$b=2k+1$ 或 $b=5-2k$ ………………………………………… 9分

①当 $b=2k+1$ 时，直线 l：$y=kx+2k+1$.

即：$y-1=k(x+2)$. 所以直线 l 过定点 $(-2,1)$ 舍去 ……………………… 10分

②当 $b=5-2k$ 时，直线 l：$y=kx-2k+5$.

即：$y-5=k(x-2)$，满足 $\Delta>0$.

所以直线 l 过定点 $Q(2,5)$.

由分析知：当直线 l 与 AQ 垂直时，A 到直线 l 的距离最大 …………………… 11分

又 $k_{AQ}=\dfrac{5-1}{2-(-2)}=1$. 所以 $k_l=-1$.

故直线 l 的方程为 $x+y-7=0$ ………………………………………… 12分

22. 解：(1) 当 $a=1$ 时，

$f'(x)=(x-2)e^x-e(x-2)=(x-2)(e^x-e)$ ………………………… 1 分

当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $1<x<2$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$.

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,1)$ 和 $(2,+\infty)$；单调减区间为 $(1,2)$ ……………… 3 分

(2) $f'(x)=(x-2)e^x-e^a(x-2)=(x-2)(e^x-e^a)$ ………………………… 4 分

令 $f'(x)=0$ 得：$x=2$ 或 $x=a$. 由于 $0<a<2$

当 $x<a$ 时，$f'(x)>0$；当 $a<x<2$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$.

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,a)$ 和 $(2,+\infty)$；单调减区间为 $(a,2)$. ……………… 5 分

$f(a)=(a-3)e^a-\frac{e^a}{2}(a^2-4a)=\frac{e^a}{2}(-a^2+6a-6)$

令 $f(a)=0$ 得 $a=3-\sqrt{3}$

① 当 $0<a<3-\sqrt{3}$ 时，$f(2)<f(a)<0$，又 $f(4)=e^4>0$

所以存在唯一 $x_1\in(2,4)$，使得 $f(x_1)=0$.

此时函数 $f(x)$ 有 1 个零点 x_1. ………………………… 6 分

② 当 $a=3-\sqrt{3}$ 时，$f(2)<f(a)=0$，又 $f(4)=e^4>0$

所以存在唯一 $x_2\in(2,4)$，使得 $f(x_2)=0$.

此时函数 $f(x)$ 有 2 个零点 x_2 和 a. ………………………… 7 分

令 $f(2)=-e^2+2e^a=0$ 得 $a=2-\ln 2$

③ 当 $3-\sqrt{3}<a<2-\ln 2$ 时，$f(2)<0<f(a)$，又 $f(4)=e^4>0$，$f(0)=-3<0$.

所以存在唯一 $x_3\in(0,a)$，唯一 $x_4\in(a,2)$，唯一 $x_5\in(2,4)$

使得 $f(x_3)=f(x_4)=f(x_5)=0$.

此时函数 $f(x)$ 有 3 个零点 x_3,x_4,x_5， ………………………… 9 分

④ 当 $a=2-\ln 2$ 时，$f(a)>f(2)=0$，又 $f(0)=-3<0$.

所以存在唯一 $x_6\in(0,a)$，使得 $f(x_6)=0$.

此时函数 $f(x)$ 有 2 个零点 x_6 和 2. ………………………… 10 分

⑤ 当 $2-\ln 2<a<2$ 时，$f(a)>f(2)>0$，又 $f(0)=-3<0$.

所以存在唯一 $x_7\in(0,a)$，使得 $f(x_7)=0$.

此时函数 $f(x)$ 有 1 个零点 x_7. ………………………… 11 分

综上所述：当 $0<a<3-\sqrt{3}$ 时，函数 $f(x)$ 有 1 个零点；

当 $a=3-\sqrt{3}$ 时，函数 $f(x)$ 有 2 个零点；

当 $3-\sqrt{3}<a<2-\ln 2$ 时，函数 $f(x)$ 有 3 个零点；

当 $a=2-\ln 2$ 时，函数 $f(x)$ 有 2 个零点；

当 $2-\ln 2<a<2$ 时，函数 $f(x)$ 有 1 个零点. ………………………… 12 分

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。