高 三 数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：新高考范围。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A=\{x|x^2\leqslant1\}$，$B=\{x|-2<x<0\}$，则 $A\cup B=$

A. $[-1,0)$　　B. $(-2,1]$　　C. $(-1,0]$　　D. $[-2,1]$

2. 已知 i 是虚数单位，则 $\frac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=$

A. $1+2\mathrm{i}$　　B. $1-2\mathrm{i}$　　C. $-1-2\mathrm{i}$　　D. $-1+2\mathrm{i}$

3. 甲、乙两人下棋，和棋的概率为 50%，甲不输的概率为 90%，则乙不输的概率为

A. 60%　　B. 50%　　C. 40%　　D. 30%

4. $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^9$ 的展开式中常数项为

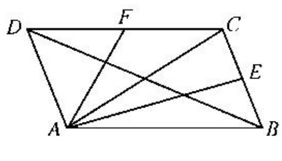
A. -84　　B. -672　　C. 84　　D. 672

5. 国防部新闻发言人在 9 月 24 日举行的例行记者会上指出："台湾是中国不可分割的一部分，解放军在台海地区组织实兵演练，展现的是捍卫国家主权和领土完整的决心和能力"．如图为我空军战机在海面上空绕台巡航．已知海面上的大气压强是 760 mmHg，大气压强 p（单位：mmHg）和高度 h（单位：m）之间的关系为 $p=760\mathrm{e}^{-kh}$（e 是自然对数的底数，k 是常数）．根据实验知 500 m 高空处的大气压强是 700 mmHg，则我战机在 1 000 m 高空处的大气压强约是（结果保留整数）

A. 645 mmHg　　B. 646 mmHg

C. 647 mmHg　　D. 648 mmHg

6. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 BC，CD 的中点，已知 $AE=\sqrt{5}$，$AF=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$



A. -6　　B. -4

C. $-\sqrt{10}$　　D. $-\sqrt{7}$

7. 在公差为 1 的等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=t$，$b_n=\frac{a_n}{a_n+1}$，若对任意的正整数 n，$b_n\leqslant b_9$ 恒成立，则实数 t 的取值范围是

A. $\left(-\frac{19}{2},-9\right)$　　B. $(-9,-8)$

C. $\left(-10,-\frac{19}{2}\right)$　　D. $(-10,-9)$

8. 已知 $f(x)=x|x|$，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f(ax^2)+4f(3-x)\geqslant 0$ 恒成立，则实数 a 的最小值是

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{8}$

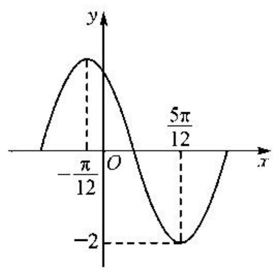
二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

9. 下列命题为真命题的是

A. 若 $a>b$，则 $2^{a-b}>\frac{1}{2}$　　B. 若 $a>b>0$，则 $\frac{\lg a}{\lg b}>1$

C. 若 $a>0,b>0$，则 $\sqrt{ab}\geqslant\frac{2ab}{a+b}$　　D. 若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$

10. 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再将所得函数图象上的所有点的横坐标变为原来的 $\frac{3}{2}$ 倍，得到函数 $g(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 的图象. 已知函数 $g(x)$ 的部分图象如图所示，则下列关于函数 $f(x)$ 的说法正确的是



A. $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{3}$

B. $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{9},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减

C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{9}$ 对称

D. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{9},0\right)$ 成中心对称

11. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$，若圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 与双曲线 C 的渐近线相切，则

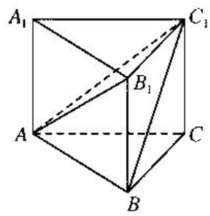
A. 双曲线 C 的实轴长为 6

B. 双曲线 C 的离心率 $e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. 点 P 为双曲线 C 上任意一点，若点 P 到 C 的两条渐近线的距离分别为 d_1,d_2，则 $d_1d_2=\frac{3}{4}$

D. 直线 $y=k_1x+m$ 与 C 交于 A,B 两点，点 D 为弦 AB 的中点，若 OD（O 为坐标原点）的斜率为 k_2，则 $k_1k_2=\frac{1}{3}$

12.《九章算术》是我国古代数学名著，它在几何学中的研究比西方早一千多年，在《九章算术》中，将底面为直角三角形，且侧棱垂直于底面的三棱柱称为堑堵；阳马指底面为矩形，一侧棱垂直于底面的四棱锥；鳖臑指四个面均为直角三角形的四面体. 如图，在堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC$，$C_1C=BC=2$，则下列说法正确的是



A. 四棱锥 $B-A_1ACC_1$ 为阳马

B. 三棱锥 C_1-ABC 为鳖臑

C. 当三棱锥 C_1-ABC 的体积最大时，$AC=\sqrt{2}$

D. 记四棱锥 $B-A_1ACC_1$ 的体积为 V_1，三棱锥 C_1-ABC 的体积为 V_2，则 $V_1=3V_2$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{3}$，则 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=$________.

14. 已知 F 为抛物线 $C:y^2=x$ 的焦点，点 A,B 在抛物线上，且分别位于 x 轴的上、下两侧，若△BFO 的面积是 $\frac{1}{2}$（O 为坐标原点），且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=12$，则直线 AB 的斜率是________.

15. 经纬度是经度与纬度的合称，它们组成一个坐标系统，称为地理坐标系统，它是一种利用三度空间的球面来定义地球上的空间的球面坐标系统，能够标示地球上的任何一个位置. 经度是个二面角，是两个经线平面(经线与地轴所成的半平面)的夹角，某一点的经度，就是该点所在的经线平面与本初子午线平面间的夹角. 纬度是个线面角，某一点的纬度是指该点与地球球心的连线和地球赤道面所成的线面角. 城市 A 位置东经 $120°$，北纬 $48°$，城市 B 位置为东经 $120°$，北纬 $18°$，若地球的半径为 R，则过 A，B 两点和地心的平面截球所得的截面圆的劣弧 AB 的长为________.

16. 若函数 $f(x)=e^x-2x$ 图象在点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程为 $y=kx+b$，则 $k-b$ 的最小值为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

在①$\sin^2A+\sin^2C-\sin^2B=\sin A\sin C$，②$\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=\cos B+\frac{1}{2}$，③$c\cdot\cos A+a\cdot\cos C=2b\cdot\cos B$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并给出解答.

问题：在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$\sin A=2\sin C$，$b=2$，且________. 求△ABC 的面积.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=(n-1)\cdot 2^{n-1}+2(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若 $b_n=\log_{a_n}2$，则在数列$\{b_n\}$中是否存在连续的两项，使得它们与后面的某一项依原来顺序构成等差数列？若存在，请将这样的两项都探究出来；若不存在，请说明理由.

19.（本小题满分 12 分）

电子邮件是一种用电子手段提供信息交换的通信方式，是互联网应用最广的服务. 通过网络的电子邮件系统，用户可以以非常低廉的价格(不管发送到哪里，都只需负担网费)、非常快速的方式(几秒钟之内可以发送到世界上任何指定的目的地)，与世界上任何一个角落的网络用户联系. 我们在用电子邮件时发现了一个有趣的现象，中国人的邮箱名称里含有数字的比较多，而外国人邮箱名称里含有数字的比较少. 为了研究邮箱名称里含有数字是否与国籍有关，随机调取 40 个邮箱名称，其中中国人的 20 个，外国人的 20 个，在 20 个中国人的邮箱名称中有 15 个含数字，在 20 个外国人的邮箱名称中有 5 个含数字.

(1)根据以上数据填写 2×2 列联表：

	中国人	外国人	总计
邮箱名称里有数字			
邮箱名称里无数字			
总计			40

(2)能否有 99%的把握认为“邮箱名称里含有数字与国籍有关”?

(3)用样本估计总体,将频率视为概率.在中国人邮箱名称里和外国人邮箱名称里各随机调取 6 个邮箱名称,记“6 个中国人邮箱名称里恰有 3 个含数字”的概率为 P_1,“6 个外国人邮箱名称里恰有 3 个含数字”的概率为 P_2,试比较 P_1 与 P_2 的大小.

附:临界值参考表与参考公式

$P(K^2\geqslant K_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
K_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

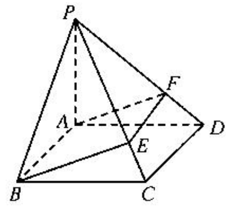
$\left(K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},\text{其中 } n=a+b+c+d\right)$

20.(本小题满分 12 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为矩形,$PA\perp AD$,平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,$AB=2$,$PA=AD=3$.点 E 在线段 PC 上(端点除外),平面 ABE 交 PD 于点 F.

(1)求证:四边形 $ABEF$ 为直角梯形;

(2)若 $AF=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$,求直线 PC 与平面 $ABEF$ 所成角的正弦值.

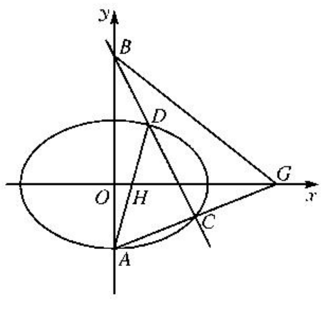


21.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 $F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$,过 F_1 且斜率为$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$的直线与椭圆的一个交点在 x 轴上的射影恰好为 F_2.

(1)求椭圆 E 的方程;

(2)如图,下顶点为 A,过点 $B(0,2)$作一条与 y 轴不重合的直线,该直线交椭圆 E 于 C,D 两点,直线 AD,AC 分别交 x 轴于点 H,G.求证:$\triangle ABG$ 与$\triangle AOH$ 的面积之积为定值,并求出该定值.



22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x-1+[a(x-1)-1]\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a\geqslant0$ 时,求函数 $f(x)$的极小值;

(2)当 $a<0$ 时,若 $x=1$ 是函数 $f(x)$的极大值点,求 a 的取值范围.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1.C　由 $A=\{x\mid -x^2+2x+3\geqslant 0\}=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid 2^{x+1}\geqslant 8\}=\{x\mid x\geqslant 2\}$，所以 $A\cap B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$. 故选 C.

2.D　因为 $z=3+2i$，故 $z^2=9+12i+4i^2=5+12i$，所以 $|z^2|=\sqrt{5^2+12^2}=13$. 故选 D.

3.B　由题意可得 $\bar{x}=\frac{2+3+4+5+6}{5}=4$，$\bar{y}=\frac{2+2.5+4.5+5+6.5}{5}=4.1$，由于回归直线过样本的中心点，所以 $1.15\times 4+a=4.1$，解得 $a=-0.5$，所以回归直线方程为 $\hat{y}=1.15x-0.5$，当 $x=8$ 时，$\hat{y}=1.15\times 8-0.5=8.7$(千元). 故选 B.

4.A　$\because \boldsymbol{a}=(-2,0)$，$\boldsymbol{b}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\therefore \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\left(-\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\therefore |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$，$|\boldsymbol{a}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=5$，设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$. 故选 A.

5.B　前 4 个小时废气中的污染物被过滤掉了 80%，则 $0.2P_0=P_0\cdot e^{4k}$，则 $k=-\frac{\ln 5}{4}$，由题意知：$P=P_0\cdot e^{kt}\leqslant 0.25\%P_0$，可得 $5^{t-8}\geqslant 2^{16}$，$t-8\geqslant 16\log_5 2$，所以 $t\geqslant 14.88$，$t-4\geqslant 10.88$，即还需要过滤 11 小时. 故选 B.

6.C　因为 P 是双曲线左支上的点，所以 $|PF_2|-|PF_1|=2a=2$，$|F_1F_2|^2=4c^2=100$. 在 $\triangle F_1PF_2$ 中，$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}=\frac{(|PF_1|-|PF_2|)^2+2|PF_1||PF_2|-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}=\frac{4+96-100}{96}=0$，所以 $\angle F_1PF_2=90^\circ$，$\triangle F_1PF_2$ 的面积为 $\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|=24$. 故选 C.

7.D　当 $n=1$ 时，$a_2=2S_1=2a_1=2$；当 $n\geqslant 2$ 时，由 $a_{n+1}=2S_n$，可得 $a_n=2S_{n-1}$. 两式相减得 $a_{n+1}-a_n=2a_n$，所以 $a_{n+1}=3a_n$，且 $a_2=2\neq 3$. 则数列 $\{a_n\}$ 从第二项开始是一个以 3 为公比的等比数列，则 $a_n=2\times 3^{n-2}(n\geqslant 2)$，所以 $a_n=\begin{cases}1,n=1,\\2\times 3^{n-2},n\geqslant 2.\end{cases}$ 所以 $a_{2\,021}=2\times 3^{2\,019}$. 故选 D.

8.B　令 $f(x)=e^x-e^{-x}+\sin 2x$，易得 $f'(x)=e^x+e^{-x}+2\cos 2x\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 不等式 $e^{ax}-x+\sin 2ax>\frac{1}{e^{ax}}-\frac{1}{x}+\sin(\ln x^2)$，即 $e^{ax}-e^{-ax}+\sin 2ax>e^{\ln x}-e^{-\ln x}+\sin(\ln x^2)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $f(ax)>f(\ln x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $ax>\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $a>\frac{\ln x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. 令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令 $g'(x)>0$，解得 $0<x<e$，令 $g'(x)<0$，解得 $x>e$，故 $g(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$. 所以实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$. 故选 B.

9.AC　由图象可知，函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=4\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\pi}{3}$，则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=3$，当 $x=\frac{5\pi}{12}$ 时，函数 $y=f(x)$ 取得最小值，则 $3\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $\varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $k=0$，$\varphi=\frac{\pi}{4}$，则 $f(x)=3\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$. 当 x

$=-\frac{\pi}{4}$时,$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=3\sin\left(-\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=-3$,故A正确,B错误;将函数$f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度,得到$y=3\sin\left[3\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=3\sin 3x$,故C正确;将函数$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度,得到$y=3\sin\left[3\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=3\cos 3x$,故D错误.故选AC.

10. BD　已知随机变量$X\sim B\left(4,\frac{1}{3}\right)$,则$E(X)=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.故A错误;因为随机变量$X\sim N(3,\sigma^2)$,$P(X\leqslant 5)=0.85$,所以$P(X\leqslant 1)=0.15$,所以$P(1<X\leqslant 3)=0.35$,故B正确;$D(2X-3)=4D(X)$,故C错误;充分性:"$A$与$B$是互斥事件"$\Rightarrow$"$A$与$B$互为对立事件",充分性不成立;必要性:"$A$与$B$是互斥事件"$\Leftarrow$"$A$与$B$互为对立事件",必要性成立.因此"$A$与$B$是互斥事件"是"$A$与$B$互为对立事件"的必要不充分条件,故D正确.故选BD.

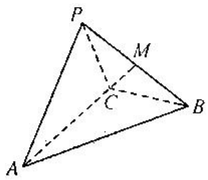
11. ACD　正方体中,$A_1D/\!/B_1C$,而M,N分别为棱A_1D_1,DD_1的中点,则$MN/\!/A_1D$,所以$B_1C/\!/MN$,所以M,B_1,N,C四点共面.故A正确;设正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的外接球的半径为R,则$R=\frac{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的外接球的表面积$S=4\pi R^2=3\pi$.故B错误;以$D$为坐标原点,$DA,DC,DD_1$所在直线分别为$x$轴,$y$轴,$z$轴,建立空间直角坐标系.则$C(0,1,0)$,$C_1(0,1,1)$,$M\left(\frac{1}{2},0,1\right)$,$N\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$,$A_1(1,0,1)$,所以$\overrightarrow{CA_1}=(1,-1,1)$,$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,1)$,$\overrightarrow{C_1M}=\left(\frac{1}{2},-1,0\right)$,$\overrightarrow{NC_1}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$.设平面$MNC_1$的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1M}=\frac{1}{2}x-y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{NC_1}=y+\frac{1}{2}z=0,\end{cases}$令$y=1$,得$x=2,z=-2$,所以平面$MNC_1$的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(2,1,-2)$.所以点$C$到平面$MNC_1$的距离$d=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{2}{3}$.故C正确;设直线$A_1C$与平面$MNC_1$所成的角为$\theta$,则$\sin\theta=\left|\frac{\overrightarrow{CA_1}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{CA_1}||\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{\sqrt{3}}{9}$.故D正确.故选ACD.

12. ABD　过A作C的准线的垂线,垂足为A',则$|PA|+|AF|+|PF|=|PA|+|AA'|+\sqrt{2}$,$|PA|+|AA'|$的最小值即为点$P$到$C$的准线的距离,所以$\triangle PAF$周长的最小值为$3+\sqrt{2}$.故A正确;因为点$P(m,2)$是$C$上一点,所以$4=4m$,解得$m=1$,则$\overrightarrow{AF}=(1-x_1,-y_1)$,$\overrightarrow{FP}=(0,2)$,$\overrightarrow{BF}=(1-x_2,-y_2)$,因为$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{FP}$,则$1-x_1+1-x_2=0$,可得$x_1+x_2=2$,则$|AF|+|BF|=x_1+x_2+2=4=2|FP|$.故B正确;若$A,F,B$三点共线,则直线$AB$不可能与$x$轴重合,设直线$AB$的方程为$x=my+1$,联立$\begin{cases}y^2=4x,\\ x=my+1,\end{cases}$整理可得$y^2-4my-4=0$,$\Delta=16m^2+16>0$,由韦达定理可得$y_1y_2=-4$,故C错误;由$|AF|+|BF|\geqslant|AB|=8$,即$x_1+x_2+2\geqslant 8$,即$x_1+x_2\geqslant 6$,所以$AB$的中点到$y$轴距离$d=\frac{x_1+x_2}{2}\geqslant 3$,当且仅当$A,F,B$三点共线时,等号成立,故D正确.故选ABD.

13. $2\sqrt{5}$　圆化为标准方程为 $x^2+(y-4)^2=10$，圆心为 $C(0,4)$，半径为 $r=\sqrt{10}$，圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|0-4-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$，所以 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{10-5}=2\sqrt{5}$.

14. $\frac{16}{7}$　由 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta=\frac{1}{4}$，解得 $\sin\theta\cos\theta=\frac{7}{16}$，所以 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{16}{7}$.

15. 80　将语文、数学捆绑视为一本书，考虑左右位置，共有 A_2^2 种方法；物理、化学放两侧，有 A_2^2 种排法；最后将英语、生物插入 4 个空位中的 2 个，共 $4\times5=20$ 种排法. 由分步乘法计数原理可知，不同的排法种数为 $A_2^2\times A_2^2\times20=80$.



16. $\sqrt{3}$　因为平面 $PBC\perp$ 平面 ABC，平面 $PBC\cap$ 平面 $ABC=BC$，$AC\subset$ 平面 ABC，$AC\perp BC$，所以 $AC\perp$ 平面 PBC. 设 $AC=2x$，因为 $PC=BC=a$，$PB=AC=2x(0<x<a)$. 取 PB 中点 M，连结 CM，M 为 PB 的中点，所以 $CM\perp PB$，$CM=\sqrt{a^2-x^2}$，所以 $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}\times2x\times\sqrt{a^2-x^2}=x\sqrt{a^2-x^2}$，所以 $V_{三棱锥P\text{-}ABC}=\frac{1}{3}\times(x\sqrt{a^2-x^2})\times2x=\frac{2x^2\sqrt{a^2-x^2}}{3}$. 设 $t=\sqrt{a^2-x^2}\,(0<t<a)$，则 $x^2=a^2-t^2$，所以 $V_{三棱锥P\text{-}ABC}=V(t)=\frac{2t(a^2-t^2)}{3}=\frac{2a^2t-2t^3}{3}(0<t<a)$，所以 $V'(t)=\frac{2a^2-6t^2}{3}$，令 $V'(t)=0$，得 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，且当 $0<t<\frac{\sqrt{3}}{3}a$ 时 $V'(t)>0$，当 $\frac{\sqrt{3}}{3}a<t<a$ 时 $V'(t)<0$，所以 $V(t)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a,a\right)$ 上单调递减. 所以当 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}a$ 时，$V(t)$ 取最大值，最大值为 $\frac{4\sqrt{3}}{27}a^3$，由已知 $\frac{4\sqrt{3}}{27}a^3=\frac{4}{3}$，解得 $a=\sqrt{3}$.

17. 解：(1) ∵ $S_{n+1}=S_n+\frac{a_n}{1+2a_n}$，$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$， ………………………… 1 分

∴ $a_{n+1}=\frac{a_n}{1+2a_n}$，即 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$， ………………………… 3 分

∴ 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{a_1}=1$，公差为 2 的等差数列， ………………………… 5 分

可得 $\frac{1}{a_n}=1+2(n-1)=2n-1$，即 $a_n=\frac{1}{2n-1}$. ………………………… 6 分

(2) 由 $b_n=\frac{a_n}{2n+1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$， ………………………… 8 分

∴ $T_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$. ………………………… 10 分

18. (1) 证明：$C=\frac{\pi}{3}$，$c=6$，所以 $\frac{c}{\sin C}=4\sqrt{3}$， ………………………… 2 分

根据正弦定理得 $\sin A=\frac{a}{4\sqrt{3}}$，$\sin B=\frac{b}{4\sqrt{3}}$. ………………………… 4 分

又 $\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}=2\sqrt{6}$，

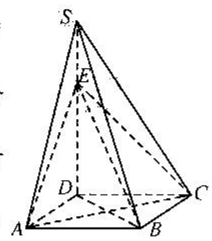
所以$\dfrac{1}{\dfrac{a}{4\sqrt{3}}}+\dfrac{1}{\dfrac{b}{4\sqrt{3}}}=2\sqrt{6}$，即$a+b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}ab$. …………………………………………………… 6分

(2)解：由余弦定理得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab$，…………………………………… 7分

由(1)，得$a+b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}ab$，结合$c=6$可得$(ab)^2-6ab-72=0$. ……………………………………… 9分

即$(ab-12)(ab+6)=0$，解得$ab=12$或$ab=-6$(舍去). …………………………………………………… 11分

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=3\sqrt{3}$. …………………………………………………………………… 12分



19.(1)证明：因为四边形$ABCD$为正方形，$AB=\sqrt{2}$，所以$BD=2$. 在$\triangle SBD$中，$SD=2$，$BD=2$，$SB=2\sqrt{2}$，…………………………………………………………………………… 1分

易得$SB^2=SD^2+BD^2$，所以$SD\perp BD$. ……………………………………………………………… 2分

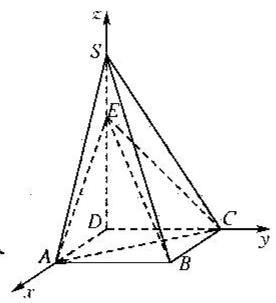
因为平面$SBD\perp$平面$ABCD$，平面$SBD\cap$平面$ABCD=BD$，$SD\subset$平面SBD，所以$SD\perp$平面$ABCD$.
……… 3分

又$AC\subset$平面$ABCD$，所以$SD\perp AC$. ……………………………………………………………………… 4分

因为底面$ABCD$是正方形，所以$AC\perp DB$. 又$SD\cap DB=D$，$SD,DB\subset$平面SDB，所以$AC\perp$平面SDB. …………… 5分

又$BE\subset$平面SDB，所以$AC\perp BE$. ……………………………………………………………………… 6分

(2)解：以D为原点，DA,DC,DS所在直线分别作为x,y,z轴建立如图所示的空间直角坐标系，



设$DE=\lambda$，则$D(0,0,0)$，$A(\sqrt{2},0,0)$，$C(0,\sqrt{2},0)$，$E(0,0,\lambda)$.

所以$\overrightarrow{EA}=(\sqrt{2},0,-\lambda)$，$\overrightarrow{EC}=(0,\sqrt{2},-\lambda)$.

设平面ACE的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则由$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{EA}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{EC}$得

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\sqrt{2}x-\lambda z=0,\\ \sqrt{2}y-\lambda z=0,\end{cases}$取$z=\sqrt{2}$，得$\boldsymbol{n}=(\lambda,\lambda,\sqrt{2})$. ……………………………… 8分

易知平面ADE的一个法向量为$\overrightarrow{DC}=(0,\sqrt{2},0)$. ………………………………………………… 9分

设二面角$C-AE-D$的大小是θ，

由图可知θ为锐角，则$\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{DC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|\lambda|}{\sqrt{2\lambda^2+2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，……………………………………… 11分

解得$\lambda=\sqrt{2}$，即$DE=\sqrt{2}$. ……………………………………………………………………………… 12分

20.解：(1)每道题的抢答中，记甲得一分为事件M，

由题意得M的发生有两种可能：甲抢到题且答对，乙抢到题且答错，…………………………………… 2分

所以$P(M)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}$，

故比赛开始，甲先得一分的概率为$\frac{3}{5}$. …………………………………………………………………… 5分

(2)由(1)知，在每道题的抢答中甲、乙得一分的概率分别$\frac{3}{5}$，$\frac{2}{5}$， …………………………………… 7分

设两人共抢答了 X 道题比赛结束，且甲获胜，

根据比赛规则，X 的所有可能取值为 3,4,5， ……………………………………………………………… 8分

则 $P(X=3)=\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$，

$P(X=4)=C_3^1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{162}{625}$，

$P(X=5)=C_4^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{648}{3\,125}$，

所以甲获胜的概率 $P=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=\frac{2\,133}{3\,125}$. …………………………………… 12分

21.(1)解：$|PA|\leqslant|PO|+|OA|\leqslant a+\sqrt{2}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，所以 $a=\sqrt{6}$. ……………………………………… 2分

设 C 的焦距是 $2c$，则$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $c=\sqrt{3}$，则 $b^2=a^2-c^2=3$，所以 C 的方程是$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………… 4分

(2)证明：①当直线 PM 斜率不存在时，PM 的方程为 $x=\sqrt{2}$ 或 $x=-\sqrt{2}$.

当 $x=\sqrt{2}$ 时，$P(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$M(\sqrt{2},-\sqrt{2})$，此时$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}=0$，即 $OP\perp OM$；

当 $x=-\sqrt{2}$ 时，同理可得 $OP\perp OM$. ……………………………………………………………………… 6分

②当直线 PM 斜率存在时，设 PM 方程为 $y=kx+m$，即 $kx-y+m=0$.

因为直线与圆相切，所以$\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$，即 $m^2=2k^2+2$， ………………………………………… 7分

联立$\begin{cases}kx-y+m=0,\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-6=0$.

设 $P(x_1,y_1)$，$M(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-6}{1+2k^2}$，

所以$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$

$=(1+k^2)\times\frac{2m^2-6}{1+2k^2}+km\times\left(-\frac{4km}{1+2k^2}\right)+m^2=\frac{3m^2-6k^2-6}{1+2k^2}$， ………………………… 9分

代入 $m^2=2k^2+2$ 整理可得$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}=0$，即 $OP\perp OM$. ……………………………………………… 10分

综上，$OP\perp OM$，又 PM 与圆 O 相切于点 N，所以 $ON\perp PM$，易得$\triangle PON\backsim\triangle PMO$，

所以$\frac{|PO|}{|PM|}=\frac{|PN|}{|PO|}$，即 $|PO|^2=|PM|\cdot|PN|$. ……………………………………………………… 12分

22. (1)解：$f'(x)=\frac{a}{x}+1=\frac{x+a}{x}$， …………………………………………………………………… 1分

当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 的单调增区间是 $(0,+\infty)$； ……………………………… 2分

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $x>-a$. 令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<-a$，所以 $f(x)$ 在 $(0,-a)$ 上单调递减，在 $(-a,+\infty)$ 上单调递增. …………………………………………………………………………………… 4分

(2)证明：$h(x)=f(x)+g(x)=a\ln x+x+\frac{1}{2}x^2-(a+2)x+\frac{3}{2}a=a\ln x+\frac{1}{2}x^2-(a+1)x+\frac{3}{2}a$，$h'(x)=x-(a+1)+\frac{a}{x}=\frac{x^2-(a+1)x+a}{x}=\frac{(x-1)(x-a)}{x}(a>1)$，

当 $x>a$ 或 $0<x<1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；

当 $1<x<a$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$ 单调递减， …………………………………………………………… 5分

不妨设 $x_1<x_2$，则 $x_1=1$，$x_2=a$，

$h(x_1)+h(x_2)-\frac{7}{2}=h(1)+h(a)-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}-a-1+\frac{1}{2}a^2-a(a+1)+a\ln a+3a-\frac{7}{2}=-\frac{1}{2}a^2+a+a\ln a-4$. … 6分

令 $u(a)=-\frac{1}{2}a^2+a+a\ln a-4$（其中 $a>1$），则 $u'(a)=-a+2+\ln a$，令 $m(a)=u'(a)$，

可得 $m'(a)=-1+\frac{1}{a}<0$，即 $u'(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，且 $u'(3)=\ln 3-1>0$，$u'(4)=\ln 4-2<0$，

故存在 $a_0\in(3,4)$ 使得 $u'(a_0)=0$，即 $2-a_0+\ln a_0=0$. ……………………………………………… 8分

当 $a\in(1,a_0)$ 时，$u'(a)>0$，$u(a)$ 单调递增；

当 $a\in(a_0,+\infty)$ 时，$u'(a)<0$，$u(a)$ 单调递减，

故当 $a=a_0$ 时，$u(a)$ 取得最大值 $u(a_0)=-\frac{1}{2}a_0^2+a_0+a_0\ln a_0-4=-\frac{1}{2}a_0^2+a_0+a_0(a_0-2)-4=\frac{1}{2}a_0^2-a_0-4$.

…… 10分

因为 $a_0\in(3,4)$，结合二次函数的性质可知，$u(a_0)<u(4)=0$， ………………………………………… 11分

所以 $h(x_1)+h(x_2)-\frac{7}{2}<0$，即 $h(x_1)+h(x_2)<\frac{7}{2}$. ……………………………………………… 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。