2022年普通高等学校招生全国统一考试模拟试题

数学试题参考答案及评分标准 2022.5

一、单项选择题(每小题5分,共40分)

1.【答案】D

【解析】集合 B 是不确定的,但是集合 B 一定包含元素0,故选D.

2.【答案】B

【解析】$z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}$,所以 z 的共轭复数的虚部为1,故选B.

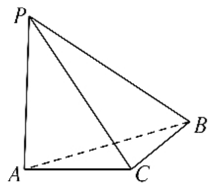
3.【答案】D

【解析】$P=\dfrac{C_1^1C_2^2}{C_2^1C_4^2}=\dfrac{1}{12}$,故选D.

4.【答案】C

【解析】因为 A,B,C 三点共线,故存在不为0的常数 m,使得 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AC}$,即 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=m(\mu\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,可得 $\lambda\mu=1$,故选C.

5.【答案】A



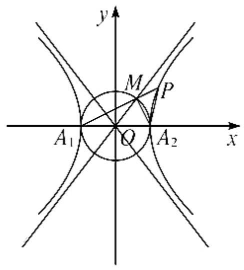
【解析】如图,设"鳖臑"为三棱锥 $P-ABC$,底面为等腰直角 ABC,$PA=AC=BC=2$,$PA\perp$ 平面 ABC,则球心 O 为 PB 的中点. 因为 $PB^2=2^2+2^2+2^2=12$,所以球 O 的半径为 $r=\sqrt{3}$,所以所求球 O 的表面积为 $4\pi r^2=12\pi$,故选A.

6.【答案】D

【解析】函数 $f(x)$ 为偶函数且 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为其一条对称轴,故 $b=f(\log_3 2)$,显然 $0<\log_3 2=\dfrac{\ln 2}{\ln 3}<\ln 2<1$,所以 $b<a$.

因为 $1.7<3^{\frac{1}{2}}<1.8$,$1.5<\dfrac{\pi}{2}<1.6$,$\ln 2<1<\dfrac{\pi}{2}$,所以 $a<c$,所以 $b<a<c$. 故选D.

7.【答案】B



【解析】因为圆 $x^2+y^2=a^2$ 与双曲线的渐近线在第一象限的交点为 M,

所以 $\angle A_1MA_2=90°$,$\tan\angle MOA_2=\dfrac{b}{a}$.

因为 $\triangle MPA_2$ 是等腰三角形.

所以$\angle PMA_2$为直角，且$\angle MA_2P=45°$.

因为$\angle PA_1M$的内角平分线与y轴平行，

所以直线MA_2和PA_2的斜率互为相反数，

所以直线MA_2和PA_2的倾斜角互补，即$\angle MOA_2=\angle MA_2P=45°$，

所以$\frac{b}{a}=\tan\angle MOA_2=1$，

所以$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{2}$. 故选B.

8.【答案】B

【解析】由$f(x)=x\cdot e^x$，$f'(x)=(x+1)e^x$，结合图形易知，过$P(1,m)$至多可作该图像的三条切线，即n的最大值为3.

此时，设切点坐标为(x_0,y_0)，则切线斜率$k=(x_0+1)e^{x_0}$，

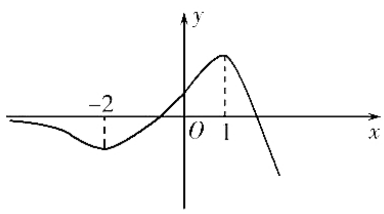
所以切线方程为$y-x_0e^{x_0}=(x_0+1)e^{x_0}(x-x_0)$，

将$P(1,m)$代入得$m=(-x_0{}^2+x_0+1)e^{x_0}$ ①

存在三条切线即方程①有三个不同的根，

设$g(x)=(-x^2+x+1)e^x$，

则$g'(x)=(-x^2-x+2)e^x$可得$g(x)$的图像如图，



所以当$g(-2)<m<0$，即$-\frac{5}{e^2}<m<0$时符合题意. 故选B.

二、多项选择题(每小题5分，共20分)

9.【答案】ABC

【解析】因为$\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d$，所以A正确.

因为$b_n^2+b_{n+2}^2-2b_{n+1}^2=b_n^2(1+q^4-2q^2)=b_n^2(q^2-1)^2\geqslant0$，所以B正确.

因为$S_{2(n+1)}-S_{2n}=a_{2n+1}+a_{2n+2}$，所以C正确.

因为$T_{2(n+1)}-T_{2n}=b_{2n+1}+b_{2n+2}=b_{2n+1}(1+q)$，当$q=-1$时，$T_{2(n+1)}-T_{2n}=0$，所以D不正确.

10.【答案】BD

【解析】由$f(1+x)+f(1-x)=0$，得$f(x)$关于点$(1,0)$对称，要使$g(x+1)=f(x+1)\sin\omega(x+1)$为奇函数，因为$f(x+1)$关于$(0,0)$对称，为奇函数，所以只要能够使$\sin\omega(x+1)$为偶函数即可，所以选BD.

11.【答案】BC

【解析】因为$f(0)=-1$，所以$\sin\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2}$，所以$\varphi=-\frac{\pi}{4}$或$\varphi=\frac{5\pi}{4}$.

又因为 $f'(x)=\sqrt{2}\omega\cos(\omega x+\varphi)$，$f'(0)=\sqrt{2}\omega\cos\varphi>0$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$，故 A 错误.

由 $f(\frac{\pi}{8})=0$，得 $\sqrt{2}\sin(\frac{\omega\pi}{8}-\frac{\pi}{4})=0$，因为 $0<\omega\leqslant 2$，所以 $-\frac{\pi}{4}<\frac{\omega\pi}{8}-\frac{\pi}{4}\leqslant 0$，所以 $\frac{\omega\pi}{8}-\frac{\pi}{4}=0$，所以 $\omega=2$，故 $f(x)=\sqrt{2}(2x-\frac{\pi}{4})$.

又因为 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{2}-2x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(2x-\frac{3\pi}{4})$，故 B 正确.

因为 $f(\frac{\pi}{12})=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$，所以 C 正确.

因为 $f(\alpha)=\sqrt{2}\sin(2\alpha-\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{8})\cos(\alpha-\frac{\pi}{8})>0$，当 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，有 $-\frac{\pi}{8}<\alpha-\frac{\pi}{8}<\frac{3\pi}{8}$，则 $\cos(\alpha-\frac{\pi}{8})>0$，故 $\sin(\alpha-\frac{\pi}{8})>0$ 恒成立，所以 D 错误.

12.【答案】AD

【解析】设向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，对于选项 A，对任意的 $\lambda\in\mathbf{R}$，

$(\lambda\boldsymbol{a})\ominus\boldsymbol{b}=(\lambda x_1,\lambda y_1)\ominus(x_2,y_2)=(\lambda x_1y_2-\lambda x_2y_1,\lambda x_1x_2+\lambda y_1y_2)$

$=\lambda(x_1y_2-x_2y_1,x_1x_2+y_1y_2)$

$=\lambda(\boldsymbol{a}\ominus\boldsymbol{b})$，，故 A 正确；

对于选项 B，假设存在唯一确定的 $\boldsymbol{e}=(x_0,y_0)$ 使得对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，都有 $\boldsymbol{a}\ominus\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}\ominus\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ 成立，

即 $(x_1y_0-x_0y_1,x_1x_0+y_1y_0)=(x_0y_1-x_1y_0,x_0x_1+y_0y_1)=(x_1,y_1)$ 恒成立，即方程组 $\begin{cases}x_1y_0-x_0y_1=x_0y_1-x_1y_0=x_1\\x_1x_0+y_1y_0=y_1\end{cases}$，对任意 x_1,y_1 恒成立，而此方程组无解，故 B 不正确；

对于选项 C，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，则 $x_1x_2+y_1y_2=0$，设 $\boldsymbol{c}=(x_3,y_3)$，则

$(\boldsymbol{a}\ominus\boldsymbol{b})\ominus\boldsymbol{c}=(x_1y_2-x_2y_1,0)\ominus(x_3,y_3)=(x_1y_2y_3-y_1x_2y_3,x_1y_2x_3-y_1x_2x_3)$，

$\boldsymbol{a}\ominus(\boldsymbol{b}\ominus\boldsymbol{c})=(x_1,y_1)\ominus(x_2y_3-x_3y_2,x_2x_3+y_2y_3)$

$=(x_1x_2x_3+x_1y_2y_3-y_1x_2y_3+y_1y_2x_3,x_1x_2y_3-x_1y_2x_3+y_1x_2x_3+y_1y_2y_3)$

$=(x_1y_2y_3-y_1x_2y_3,-x_1y_2x_3+y_1x_2x_3)\neq\mu(x_1y_2y_3-y_1x_2y_3,x_1y_2x_3-y_1x_2x_3)$，其中 $\mu\in\mathbf{R}$，故 C 不正确；

对于选项 D，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则 $x_1y_2-x_2y_1=0$，设 $\boldsymbol{c}=(x_3,y_3)$，

$(\boldsymbol{a}\ominus\boldsymbol{b})\ominus\boldsymbol{c}=(0,x_1x_2+y_1y_2)\ominus(x_3,y_3)=(-x_1x_2x_3-y_1y_2x_3,x_1x_2y_3+y_1y_2y_3)$，

$\boldsymbol{a}\ominus(\boldsymbol{b}\ominus\boldsymbol{c})=(x_1x_2x_3+x_1y_2y_3-y_1x_2y_3+y_1y_2x_3,x_1x_2y_3-x_1y_2x_3+y_1x_2x_3+y_1y_2y_3)$

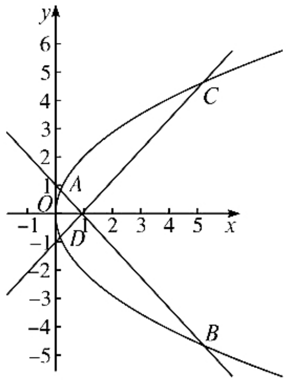
$=(x_1x_2x_3+y_1y_2x_3,x_1x_2y_3+y_1y_2y_3)$，所以 $(\boldsymbol{a}\ominus\boldsymbol{b})\ominus\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}\ominus(\boldsymbol{b}\ominus\boldsymbol{c})$ 的模相等，故 D 正确.

故选 AD.

三、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13.【答案】8.5

【解析】由题意可知回归直线方程 $\hat{y}=0.76x+0.4$ 必过点 $(\bar{x},\bar{y})$，可求得 $t=8.5$.



14.【答案】$y^2=4x$

【解析】如图所示,设直线 l_1 的倾斜角为 θ,则直线 l_2 的倾斜角为 $\theta-\frac{\pi}{2}$,根据焦点弦长公式可得 $|AB|=\frac{2p}{\sin^2\theta}$,$|CD|=\frac{2p}{\sin^2(\theta-\frac{\pi}{2})}=\frac{2p}{\cos^2\theta}$,

所以 $|AB|\cdot|CD|=\frac{2p}{\sin^2\theta}\cdot\frac{2p}{\cos^2\theta}=\frac{4p^2}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{16p^2}{\sin^2 2\theta}$,

因为 $0<\sin^2 2\theta\leqslant 1$,所以当 $\theta=45°$,$|AB|\cdot|CD|$ 取最小值 $16p^2$,

所以 $16p^2=64$,所以 $p=2$,故抛物线的方程为 $y^2=4x$.

15.【答案】$\frac{\pi}{3}$

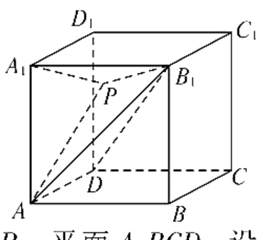
【解析】函数 $f(x)=\cos 2x$ 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后得到 $g(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{6})$.

因为 $x_1\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$,所以 $2x_1\in[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$,所以 $f(x_1)=\cos 2x_1\in[-\frac{1}{2},1]$.

因为对于任意的 $x_1\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$,总存在 $x_2\in[m,n]$,使得 $f(x_1)=g(x_2)$,所以 $g(x_2)$ 的取值范围应包含 $[-\frac{1}{2},1]$,根据余弦函数的性质,为使 $|m-n|$ 取最小值,只需函数 $g(x)$ 在 $x\in[m,n]$ 上单调且值域为 $[-\frac{1}{2},1]$ 即可.

由 $2k\pi-\frac{2\pi}{3}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 可得 $k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$,因此 $|m-n|$ 的最小值为 $|-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}|=\frac{\pi}{3}$.

16.【答案】$\sqrt{2}$;$\frac{2+\sqrt{3}}{2}\pi$



【解析】在 $\triangle ADB_1$ 中,$\angle DAB_1=\frac{\pi}{2}$,$\tan\angle ADB_1=\frac{AB_1}{AD}=\sqrt{2}$,所以 $\tan\angle APB_1=\sqrt{2}$.

由 $\tan\angle APB_1=\sqrt{2}$ 可知 $\tan\frac{\angle APB_1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

因为空间动点 P 满足 $A_1P\perp AB_1$,且 $AB_1\perp$ 平面 A_1BCD_1,所以点 $P\in$ 平面 A_1BCD_1. 设 AB_1 的中点为 O,则点 P 的轨迹为以 O 为圆心的圆,此圆半径为 $\frac{AB_1}{2}\div\tan\frac{\angle APB_1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\div\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$,所以点 P 的轨迹围成封闭图形的面积为 $\pi(\frac{\sqrt{3}+1}{2})^2=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\pi$.

四、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解:

选择①:

(1)因为$\{a_n\}$为等差数列,令 $n=1$,则 $a_2=2a_1+1=3$,所以公差 $d=2$. ………… 2 分

所以等差数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n-1$. …………………………………… 5 分

(2)由(1)可知

$T_{2n}=-a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots-a_{2n-1}+a_{2n}$

$=(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{2n}-a_{2n-1})=2n$. ………………………………… 10 分

选择②:

(1)当 $n\geqslant2$ 时,$2S_n=(n+1)a_n$,$2S_{n-1}=na_{n-1}$,因此

$2a_n=(n+1)a_n-na_{n-1}$, …………………………………………………………… 2 分

即$\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{a_{n-1}}{n-1}$,所以$\{\dfrac{a_n}{n}\}$为常数列,因此$\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{a_1}{1}=2$, …………………………… 3 分

所以 $a_n=2n$. ………………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)可知

$T_{2n}=-a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots-a_{2n-1}+a_{2n}$

$=(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{2n}-a_{2n-1})$

$=2n$. ………………………………………………………………………………… 10 分

选择③:

(1)当 $n=1$ 时,$4a_1=a_1^2+2a_1-3$,即$(a_1-3)(a_1+1)=0$,又因为 $a_n>0$,所以 $a_1=3$.

当 $n\geqslant2$ 时,有 $4S_n=a_n^2+2a_n-3$,$4S_{n-1}=a_{n-1}^2+2a_{n-1}-3$,

所以 $4a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+2a_n-2a_{n-1}$,即$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$. …………… 3 分

又因为 $a_n>0$,所以 $a_n-a_{n-1}=2$,所以$\{a_n\}$为公差为 2 等差数列,

所以 $a_n=3+(n-1)\times2=2n+1$. ………………………………………………… 5 分

(2)由(1)可知

$T_{2n}=-a_1+a_2-a_3+a_4+\cdots-a_{2n-1}+a_{2n}$

$=(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{2n}-a_{2n-1})=2n$. ………………………………… 10 分

18. 解:(1)由已知及正弦定理,得

$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin B+\sin C$.

又因为 $A+B+C=\pi$,所以 $\sin B=\sin(A+C)$,

所以 $\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin(A+C)+\sin C$,

则 $\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin A\cos C+\cos A\sin C+\sin C$,即

$\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin C\cos A+\sin C$. ………………………………………… 3 分

因为 $\sin C\neq0$,所以$\sqrt{3}\sin A=\cos A+1$,即 $\sin(A-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$.

因为 $0<A<\pi$,所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. ………………………………………………… 6 分

(2)由$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=-3$可知$cb\cos\frac{2\pi}{3}=-3$,因此$bc=6$. ………………………… 7 分

由$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-bc=7$,可得

$b+c=\sqrt{7+3\times6}=5$.

由$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABT}+S_{\triangle ACT}$得

$\frac{1}{2}bc\sin60^\circ=\frac{1}{2}b\cdot AT\cdot\sin30^\circ+\frac{1}{2}c\cdot AT\cdot\sin30^\circ$, ………………………… 10 分

因此

$$AT=\frac{bc\sin60^\circ}{(b+c)\sin30^\circ}=\frac{6\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{5\times\frac{1}{2}}=\frac{6\sqrt{3}}{5}.$$ ………………………… 12 分

19.解:(1)填表如下.

	00 前	00 后	总计
购买	35	20	55
未购买	15	30	45
总计	50	50	100

………………………… 3 分

因为$K^2=\frac{100\times(35\times30-20\times15)^2}{50\times50\times55\times45}\approx9.091>6.635$,

所以有 99% 的把握认为购买该系列盲盒与年龄有关. ………………………… 5 分

(2)①因为$(1-\frac{3}{12})(1-\frac{m}{12})^2=\frac{1}{3}$,所以$m=4$. ………………………… 7 分

②X的所有取值为 0,1,2,3,

$P(X=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{36}$;

$P(X=1)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{36}$;

$P(X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$;

$P(X=3)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

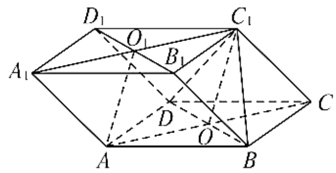
所以X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$

………………………… 10 分

所以 $E(X)=\frac{25}{12}$. …………………………………………………………………… 12 分

20. (1)证明:如图,连接 AC,设 AC 与 BD 相交于点 O,则 O 为 AC 的中点. 连接 A_1C_1,C_1O. ……………………………………………………………………………………… 1 分



因为四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 为平行四边形,O_1 为线段 B_1D_1 的中点,

所以 $A_1C_1\cap B_1D_1=O_1$ 且 O_1 为线段 A_1C_1 的中点. ………………………………………………………… 2 分

因为平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AA_1/\!/BB_1/\!/CC_1$ 且 $AA_1=BB_1=CC_1$,

所以四边形 A_1ACC_1 为平行四边形, ………………………………………………………… 3 分

所以 $A_1C_1/\!/AC$ 且 $A_1C_1=AC$,故 $O_1C_1/\!/AO$ 且 $O_1C_1=AO$,

所以四边形 AOC_1O_1 为平行四边形,$AO_1/\!/C_1O$. ………………………………………… 4 分

又因为 $AO_1\not\subset$平面 C_1BD,$C_1O\subset$平面 C_1BD,所以 $AO_1/\!/$平面 C_1BD. …………… 5 分

(2)解:取线段 AB 的中点 E,连接 DE.

因为 $AB=AD=2$,$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$,所以$\triangle ABD$ 为等边三角形,故 $DE\perp AB$,

而 $AB/\!/CD$,所以 $DE\perp CD$. ………………………………………………………………… 6 分

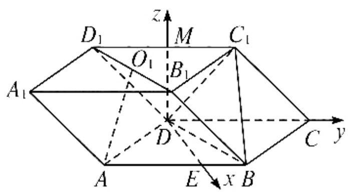
作 $DM\perp C_1D_1$,与 C_1D_1 相交于点 M,由 $C_1D_1/\!/CD$ 知 $DM\perp CD$,

又因为平面 $CDD_1C_1\perp$平面 $ABCD$,平面 $CDD_1C_1\cap$平面 $ABCD=CD$,$DM\subset$平面 CDD_1C_1,

所以 $DM\perp$平面 $ABCD$.

同理,可得 $DE\perp$平面 CDD_1C_1. ………………………………………………………………… 7 分

依次以 DE,DC,DM 所在直线为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,如图所示.



设 $DM=h(h>0)$,则 $D(0,0,0)$,$B(\sqrt{3},1,0)$,

$C_1(0,2-h,h)$,$A_1(\sqrt{3},-1-h,h)$,$C(0,2,0)$,

所以$\overrightarrow{DB}=(\sqrt{3},1,0)$,$\overrightarrow{DC_1}=(0,2-h,h)$,$\overrightarrow{A_1C}=(-\sqrt{3},3+h,-h)$. ……………………………………………… 8 分

设平面 C_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,由 $\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{DB}$,$\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{DC_1}$得$\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0\\(2-h)y+hz=0\end{cases}$

令 $x=h$,则 $y=-\sqrt{3}h$,$z=\sqrt{3}(2-h)$,$\boldsymbol{m}=(h,-\sqrt{3}h,\sqrt{3}(2-h))$. …………………… 9 分

由 $DE\perp$平面 CDD_1C_1,可得平面 CC_1D 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$. ………… 10 分

因为二面角 $B-C_1D-C$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{7}}{7}$,所以

$$|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\frac{h}{1\times\sqrt{h^2+3h^2+3(2-h)^2}}=\frac{\sqrt{7}}{7},$$

解得 $h=1$. ……………………………………………………………………………………… 11 分

因此 $\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$,$\overrightarrow{A_1C}=(-\sqrt{3},4,-1)$,故直线 A_1C 与平面 C_1BD 所成角的正弦

值为$|\cos<\boldsymbol{m},\overrightarrow{A_1C}>|=\dfrac{|-\sqrt{3}-4\sqrt{3}-\sqrt{3}|}{\sqrt{7}\times\sqrt{3+16+1}}=\dfrac{3\sqrt{105}}{35}$. ………………………… 12 分

21. 解：(1)设$M(x,y)$，由题意可知M的轨迹方程为

$2-\dfrac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{2}=\sqrt{(\dfrac{x+1}{2})^2+(\dfrac{y}{2})^2}$, ………………………………………… 2 分

化简得$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,x\in(-2,2)$，所以动点$M$的轨迹方程是$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,x\in(-2,2)$.

……………………………………………………………………………… 4 分

(2)当$PQ\perp x$轴时，直线PQ的方程为$x=\pm1$，所以$|PQ|=3$，此时

$S_{\triangle POQ}=\dfrac{1}{2}\times3\times1=\dfrac{3}{2}$. ……………………………………………………………… 5 分

当PQ与x轴不垂直时，设直线PQ的方程为$y=kx+t$，且$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=kx+t\end{cases}$，可得$(3+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-12=0$，所以

$x_1+x_2=\dfrac{-8kt}{3+4k^2},x_1x_2=\dfrac{4t^2-12}{3+4k^2}$. ………………………………………………………… 7 分

因为以O为圆心，1为半径的圆与直线PQ相切，所以$\dfrac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，即$t^2=1+k^2$.

因此$|PQ|^2=(1+k^2)(x_1-x_2)^2=(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]$

$=(1+k^2)[(\dfrac{-8kt}{3+4k^2})^2-4\times\dfrac{4t^2-12}{3+4k^2}]$

$=\dfrac{16(1+k^2)(9k^2+6)}{(3+4k^2)^2}$. ……………………………………………………………… 9 分

令$p=3+4k^2$，则$p\geqslant3$，且

$|PQ|^2=\dfrac{16(1+\dfrac{p-3}{4})(9\times\dfrac{p-3}{4}+6)}{p^2}=-3(\dfrac{1}{p}-1)^2+12$, ………………………… 11 分

因此当且仅当$p=3,k=0$，直线PQ为$y=1$时，$|PQ|_{\max}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$，此时$\triangle POQ$的面积最大，最大值为$\dfrac{1}{2}|PQ|_{\max}\cdot1=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. …………………………………………………… 12 分

22. (1)解：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，显然，$f'(x)=e^x(1+a\ln x+\dfrac{a}{x})$.

设$g(x)=1+a\ln x+\dfrac{a}{x}$，则$g'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{a(x-1)}{x^2}$, ………………………………… 1 分

因此，当$a=0$时，$f(x)=e^x$，$f(x)$无极值点；……………………………………………… 2 分

当$a>0$时，如果$x>1$，则$g'(x)>0$；如果$x<1$，则$g'(x)<0$. 因此$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，$g(x)$的最小值为$g(1)=1+a>0$，所以此时$f'(x)>0$

恒成立，$f(x)$无极值点. ………………………………………………………… 3 分
当$a<0$时，如果$x>1$，则$g'(x)<0$；如果$x<1$，则$g'(x)>0$. 因此$g(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，$g(x)$的最大值为$g(1)=1+a$.
因此，当$1+a\leqslant 0$即$a\leqslant -1$时，$f'(x)\leqslant 0$恒成立，$f(x)$无极值点. ……………… 4 分
当$1>1+a>0$即$-1<a<0$时，$g(1)=1+a>0$，

因为$-1<a<0$，所以$-\dfrac{1}{a}>1$，$0<e^{\frac{1}{a}}<1$，

又易证$e^x>2x$在$x>1$时恒成立，

所以$e^{-\frac{1}{a}}>2(-\dfrac{1}{a})=-\dfrac{2}{a}$，

所以$ae^{-\frac{1}{a}}<a(-\dfrac{2}{a})=-2$，$g(e^{\frac{1}{a}})=2+ae^{-\frac{1}{a}}<0$，

所以，$g(x)$在区间$(0,1)$内有一个零点记为m；

又$g(e^{-\frac{1}{a}})=ae^{\frac{1}{a}}<0$，所以$g(x)$在区间$(1,+\infty)$内有一个零点记为$n$；………… 5 分
所以$f(x)$在$(0,m)$，$(n,+\infty)$上单调递减，在(m,n)上单调递增，
所以m是$f(x)$的极小值点，n是$f(x)$的极大值点，此时$f(x)$有两个极值点.
故当$f(x)$有两个极值点时，$-1<a<0$. ……………………………………………… 6 分
(2)证明：因为x_1为函数$f(x)$的零点，所以$1+a\ln x_1=0$，因此$x_1=e^{-\frac{1}{a}}$. ………… 7 分
设$h(x)=f'(x)$，

则$h'(x)=e^x(1+a\ln x+\dfrac{2a}{x}-\dfrac{a}{x^2})$.

记其中$l(x)=1+a\ln x+\dfrac{2a}{x}-\dfrac{a}{x^2}$，则$h'(x)=e^x l(x)$，

又因为$l'(x)=\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{2a}{x^2}+\dfrac{2a}{x^3}=\dfrac{a(x^2-2x+2)}{x^3}$，

所以当$a\geqslant\dfrac{3}{2}$时，$l'(x)>0$，$l(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. ………………………… 9 分

因为$l(\dfrac{1}{2})=1-a\ln 2\leqslant 1-\ln 2\sqrt{2}<0$，

由于$a\geqslant\dfrac{3}{2}$，所以$\dfrac{1}{a}\leqslant\dfrac{2}{3}$，$e^{\frac{1}{a}}\leqslant e^{\frac{2}{3}}<\sqrt[3]{e^2}<\sqrt[3]{8}=2$，

所以$l(x_1)=l(e^{-\frac{1}{a}})=ae^{\frac{1}{a}}(2-e^{\frac{1}{a}})>0$

所以存在$x_2\in(\dfrac{1}{2},x_1)$，使得$l(x_2)=0$，………………………………………… 11 分

所以当$0<x<x_2$时，$l(x)<0$，即$h'(x)<0$，函数$h(x)$单调递减；当$x>x_2$时，$l(x)>0$，即$h'(x)>0$，函数$h(x)$单调递增，所以x_2是函数$h(x)=f'(x)$的极小值点且$x_2<x_1$.
……………………………………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。