

哈尔滨师大附中  
东北师大附中  
辽宁省实验中学

2022 年高三第一次联合模拟考试

# 理科数学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 复数  $z$  满足  $(1+i)^2 z = 2-4i$ , 则复数  $z =$   
A.  $-2+i$                       B.  $-2-i$                       C.  $1-2i$                       D.  $2+i$
2. 已知集合  $M = \{y \mid y = 2^x, x > 1\}$ ,  $N = \{x \mid y = \sqrt{2x-x^2}\}$ , 则  $M \cup N$  等于  
A.  $\emptyset$                               B.  $\{2\}$                               C.  $[1, +\infty)$                       D.  $[0, +\infty)$
3. 下面是某城市某日在不同观测点对细颗粒物( $PM_{2.5}$ )的观测值:  
396 275 268 225 168 166 176 173 188 168 141 157  
若在此组数据中增加一个比现有的最大值大 25 的数据, 下列数字特征没有改变的是  
A. 极差                              B. 中位数                              C. 众数                              D. 平均数
4. 设  $m, n$  是两条不同的直线,  $\alpha, \beta, \gamma$  是三个不同的平面, 下列四个命题中正确的是  
A. 若  $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$ , 则  $m \parallel n$                               B. 若  $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$ , 则  $\alpha \parallel \beta$   
C. 若  $\alpha \parallel \beta, m \subset \alpha, n \parallel \beta$ , 则  $m \parallel n$                               D. 若  $\alpha \parallel \beta, \beta \parallel \gamma, m \perp \alpha$ , 则  $m \perp \gamma$
5. 等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 已知  $a_6 = 10, S_8 = 44$ , 则  $S_5 =$   
A. 3                                      B.  $\frac{9}{2}$                                       C. 5                                      D.  $\frac{11}{2}$
6. 直线  $l: x+y+m=0$  与圆  $C: (x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$  交于  $A, B$  两点, 若  $|AB| = 2$ , 则  $m$  的值为  
A.  $\pm\sqrt{2}$                               B.  $\pm 2$                                       C.  $\pm\sqrt{6}$                                       D.  $\pm 2\sqrt{2}$
7. 已知  $a, b \in R$ , 则“ $ab \neq 0$ ”的一个必要条件是  
A.  $a+b \neq 0$                               B.  $a^2 + b^2 \neq 0$                               C.  $a^3 + b^3 \neq 0$                               D.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq 0$
8. 已知  $a = \log_6 \sqrt[3]{7}$ ,  $b = \log_7 \sqrt[3]{6}$ ,  $c = 6^{0.1}$ , 则  
A.  $b < c < a$                               B.  $b < a < c$                               C.  $c < a < b$                               D.  $a < b < c$

理科数学试卷 第 1 页(共 4 页)

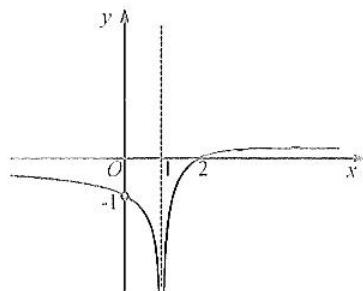
9. 已知某个函数的图像如图所示,则下列解析式中与此图像最为符合的是

A.  $f(x) = \frac{\ln|x-1|}{x}$

B.  $f(x) = \frac{x}{\ln|x-1|}$

C.  $f(x) = \frac{x-2}{|x|-1}$

D.  $f(x) = \frac{x-2}{x(x-1)}$



10. 已知数列  $\{a_n\}$  满足对任意的正整数  $n$ , 都有  $a_1 + a_2 + \dots + a_n - a_{n+1} = 0$ , 其中  $a_1 = 3$ , 则数列  $\{a_n\}$  的前 2022 项和是

A.  $3 \times 2^{2022} - 3$

B.  $3 \times 2^{2021} + 1$

C.  $3 \times 2^{2021}$

D.  $3 \times 2^{2021} + 2$

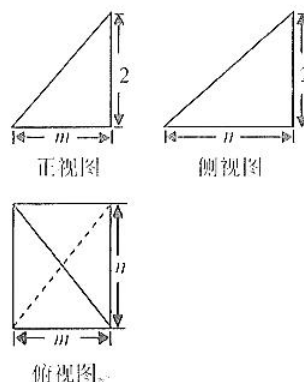
11. 如图是一个简单几何体的三视图,若  $m + n = 4$ , 则该几何体外接球表面积的最小值为

A.  $4\pi$

B.  $12\pi$

C.  $20\pi$

D.  $24\pi$



12. 已知  $a > b > 0$ ,  $F_1, F_2$  是双曲线  $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的两个焦点, 若点  $P$  为椭圆  $C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  上的动点, 当  $P$  为椭圆的短轴端点时,  $\angle F_1PF_2$  取最小值, 则椭圆  $C_2$  离心率的取值范围为

A.  $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

B.  $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$

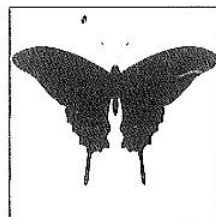
C.  $(0, \frac{\sqrt{2}}{3}]$

D.  $[\frac{\sqrt{2}}{3}, 1)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量  $\mathbf{a} = (-3, 4)$ ,  $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{a}$ , 点  $A$  的坐标为  $(3, -4)$ , 则点  $B$  的坐标为 \_\_\_\_\_.

14. 对称性是数学美的重要特征, 是数学家追求的目标, 也是数学发现与创造中的重要的美学因素. 著名德国数学家和物理学家魏尔说: “美和对称紧密相连”. 现用随机模拟的方法来估算对称蝴蝶 (如图中阴影区域所示) 的面积, 做一个边长为 2dm 的正方形将其包含在内, 并向该正方形内随机投掷 1000 个点, 已知恰有 395 个点落在阴影区域内, 据此可估计图中对称蝴蝶的面积是 \_\_\_\_\_  $\text{dm}^2$ .



15. 在棱长为 2 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的侧面  $ABB_1A_1$  内有一动点  $P$  到直线  $A_1B_1$  与直线  $BC$  的距离相等, 则在侧面  $ABB_1A_1$  上动点  $P$  的轨迹与棱  $AB, BB_1$  所围成的图形面积是 \_\_\_\_\_.

16. 已知函数  $f(x) = ax - |\sin x|$ ,  $x \in [0, 2\pi)$ ,  $a \in \mathbb{R}$  恰有 3 个零点  $x_1, x_2, x_3$ , 且  $x_1 < x_2 < x_3$ , 有下列结论: ①  $2x_2 = x_1 + x_3$ ; ②  $ax_2 - \sin x_2 = 0$ ; ③  $2x_3 - (1 + x_3^2) \sin 2x_3 = 0$ ; ④  $\sin x_2 \sin x_3 + x_2 x_3 \cos^2 x_3 = 0$ . 其中正确结论的序号为 \_\_\_\_\_ . (填写所有正确结论的序号)

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (本小题满分 12 分) 第七次全国人口普查数据显示, 我国 60 岁及 60 岁以上人口已达 2.64 亿, 预计“十四五”期间这一数字将突破 3 亿, 我国将从轻度老龄化进入中度老龄化阶段. 为了调查某地区老年人生活幸福指数, 某兴趣小组在该地区随机抽取 40 位老人(其中男性 20 人, 女性 20 人), 进行幸福指数调查, 规定幸福指数越高老年生活越幸福, 幸福指数大于或等于 50 的老人为老年生活非常幸福, 反之即为一般幸福. 调查所得数据的茎叶图如下:

| 男性老人      |   | 女性老人      |
|-----------|---|-----------|
| 8 9 7 5   | 1 |           |
| 9 8       | 2 | 3 4       |
| 5 9 7 3 1 | 3 | 1 5 5 8   |
| 8 7 5 4 2 | 4 | 1 2 4 5 8 |
| 7 2 1     | 5 | 1 1 7 8 9 |
| 4         | 6 | 2 5 6     |
|           | 7 | 3         |

(1) 依据上述样本数据的茎叶图, 分析此样本中男性老人和女性老人相比哪个幸福指数相对更高, 并说明理由(可以不计算说明);

(2) 请完成下列  $2 \times 2$  列联表, 并判断能否有 90% 的把握认为老年人幸福指数与性别有关?

|    | 一般幸福 | 非常幸福 | 合计 |
|----|------|------|----|
| 男性 |      |      | 20 |
| 女性 |      |      | 20 |
| 合计 |      |      | 40 |

附:  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ , 其中  $n = a + b + c + d$ .

|                   |       |       |       |       |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|
| $P(K^2 \geq k_0)$ | 0.15  | 0.10  | 0.05  | 0.025 |
| $k_0$             | 2.072 | 2.706 | 3.841 | 5.024 |

18. (本小题满分 12 分) 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ , 已知  $a - b \cos C = \frac{\sqrt{3}}{3} c \sin B$ ,

角  $C$  的内角平分线与边  $AB$  交于点  $D$ .

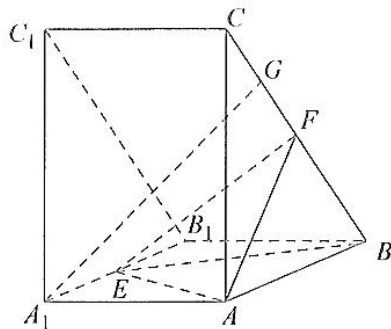
(1) 求角  $B$  的大小;

(2) 记  $\triangle BCD, \triangle ACD$  的面积分别为  $S_1, S_2$ , 在 ①  $c = 2, b = \sqrt{3}$ , ②  $S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}, b = \sqrt{7}, A > C$  这

两个条件中任选一个作为已知, 求  $\frac{S_1}{S_2}$  的值.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

19. (本小题满分 12 分) 如图, 在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 侧面  $ACC_1A_1$  是矩形,  $AC \perp AB$ ,  $AB = AA_1 = 2$ ,  $AC = 3$ ,  $\angle A_1AB = 120^\circ$ ,  $E, F$  分别为棱  $A_1B_1, BC$  的中点,  $G$  为线段  $CF$  的中点.



- (1) 证明:  $A_1G \parallel$  平面  $AEF$ ;  
(2) 求二面角  $A - EF - B$  的余弦值.

20. (本小题满分 12 分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , 点  $P$  为椭圆  $C$  上非顶点的动点, 点  $A_1, A_2$  分别为椭圆  $C$  的左、右顶点, 过  $A_1, A_2$  分别作  $l_1 \perp PA_1, l_2 \perp PA_2$ , 直线  $l_1, l_2$  相交于点  $G$ , 连接  $OG$  ( $O$  为坐标原点), 线段  $OG$  与椭圆  $C$  交于点  $Q$ . 若直线  $OP, OQ$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ .

- (1) 求  $\frac{k_1}{k_2}$  的值;  
(2) 求  $\triangle POQ$  面积的最大值.

21. (本小题满分 12 分) 已知函数  $f(x) = e^x - k^2 \ln x$  (其中  $e$  是自然对数的底数).

- (1) 当  $k = 1$  时, 证明:  $f(x) > 2$ ;  
(2) (i) 当  $x \in [1, +\infty)$  时,  $f(x) > kx$  恒成立, 求正整数  $k$  的取值集合;

(ii) 证明:  $e^{n+1} - \ln(n!) > \frac{n^2 + n}{2} (n \in \mathbb{N}^+)$ .

参考数据:  $\ln 2 \approx 0.6931, \ln 3 \approx 1.0986, \ln 5 \approx 1.6094$

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分, 作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的题号涂黑.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t, \\ y = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$  ( $t$  为参数), 以原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C_2$  的极坐标方程是  $\rho = 4\sin\theta - 4\cos\theta$ .

- (1) 分别写出  $C_1$  的普通方程与  $C_2$  的直角坐标方程;  
(2) 将曲线  $C_1$  绕点  $P(1, 2)$  按逆时针方向旋转  $90^\circ$  得到曲线  $C_3$ , 若曲线  $C_3$  与曲线  $C_2$  交于  $A, B$  两点, 求  $|PA| + |PB|$  的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲]

已知函数  $f(x) = |x - 2| + |x + 1|$ .

- (1) 求不等式  $f(x) \leq 4$  的解集;  
(2) 若函数  $f(x)$  最小值为  $m$ , 已知  $a > 0, b > 0, c > 0, \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = m$ , 求  $a + 2b + 3c$  的最小值.

哈尔滨师大附中、东北师大附中、辽宁省实验中学

2022年高三第一次联合模拟考试

理科数学答案

一、选择题

1-6. B D C D C C    7-12 B B A C B A

二、填空题

13. (-3,4)    14. 1.58    15.  $\frac{4}{3}$     16. ②③④

三、解答题

17. 解: (1) 从茎叶图观察分析得,  
女性幸福指数有65%在茎4, 5, 6上, 中位数是46.5  
男性幸福指数有65%在茎3, 4, 5上, 中位数是38  
所以, 女性的幸福指数相对较高.

-----4分

(其他理由酌情给分)

(2)

|    | 一般幸福 | 非常幸福 | 合计 |
|----|------|------|----|
| 男性 | 16   | 4    | 20 |
| 女性 | 11   | 9    | 20 |
| 合计 | 27   | 13   | 40 |

-----6分

$$K^2 = \frac{40 \times (16 \times 9 - 11 \times 4)^2}{27 \times 13 \times 20 \times 20} = \frac{1000}{351} \approx 2.849 > 2.706,$$

-----10分

所以, 有90%的把握认为老年人幸福指数与性别有关.

-----12分

18. 解: (1)  $\because a - b \cos C = \frac{\sqrt{3}}{3} c \sin B$ , 由正弦定理,  $\sin A - \sin B \cos C = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin C \sin B$ ,

-----2分

$\because A + B + C = \pi, \therefore \sin(B + C) - \sin B \cos C = \cos B \sin C = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin C \sin B$ ,

-----4分

$\because \sin C \neq 0, \therefore \tan B = \sqrt{3}$ , 又  $B \in (0, \pi), \therefore B = \frac{\pi}{3}$

-----6分

(2)  $\because$  角  $C$  的内角平分线与边  $AB$  交于点  $D$ , 若选择①

$$c=2, b=\sqrt{3}, \text{ 由 } \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \text{ 及 } B = \frac{\pi}{3}, \text{ 得 } \sin C = 1, \therefore C \in (0, \pi), \therefore C = \frac{\pi}{2}, \text{ -----8分}$$

$$\therefore a = \sqrt{c^2 - b^2} = 1 \text{ -----9分}$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} : S_{\triangle ACD} = BD : AD = BC : AC = a : b = 1 : \sqrt{3}, \therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ -----12分}$$

若选择②

$$S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}, b = \sqrt{7}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{3}{4}\sqrt{3}, B = \frac{\pi}{3}, \therefore ac = 3, \text{ -----7分}$$

$$\text{又 } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, b = \sqrt{7}, B = \frac{\pi}{3}, \therefore 7 = (a+c)^2 - 3ac$$

$$\therefore a+c=4, \text{ -----8分}$$

$$\therefore ac=3, a+c=4, \text{ 又 } A > C, \therefore a > c, \therefore a=3, c=1, \text{ -----9分}$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} : S_{\triangle ACD} = BD : AD = BC : AC = a : b = 3 : \sqrt{7}, \therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{3\sqrt{7}}{7}. \text{ -----12分}$$

19. (1) 证: 连 $A_1B$ 交 $AE$ 于点 $M$ , 连 $MF$ ,

$$\therefore F \text{ 为 } BC \text{ 的中点, } G \text{ 为 } CF \text{ 的中点, } \therefore \frac{BF}{FG} = 2,$$

$$\therefore A_1E // BA, A_1E = \frac{1}{2}BA, \therefore \triangle A_1EM \sim \triangle BAM, \therefore \frac{BM}{A_1M} = \frac{BA}{A_1E} = 2$$

$$\therefore \frac{BF}{FG} = \frac{BM}{MA_1}, \therefore FM // A_1G, \text{ -----3分}$$

$$\therefore A_1G \not\subset \text{平面 } AEF, FM \subset \text{平面 } AEF, \therefore A_1G // \text{平面 } AEF \text{ -----5分}$$

$$(2) \therefore \angle B_1A_1A = 60^\circ, AA_1 = 2, A_1E = 1, \therefore AE = \sqrt{3}, \angle AEA_1 = 90^\circ,$$

$$\therefore AB // A_1B_1 \therefore AB \perp AE$$

$$\text{以 } A \text{ 为原点, 分别以 } AB, AE, AC \text{ 为 } x, y, z \text{ 轴, 建系 } A-xyz \text{ -----6分}$$

$$E(0, \sqrt{3}, 0), B(2, 0, 0), C(0, 0, 3), F(1, 0, \frac{3}{2}),$$

$$\overrightarrow{AE} = (0, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{AF} = (1, 0, \frac{3}{2}),$$

$$\overrightarrow{EB} = (2, -\sqrt{3}, 0), \overrightarrow{BF} = (-1, 0, \frac{3}{2})$$

设平面  $AEF$  的法向量  $\vec{m} = (x, y, z)$ ,

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AE} = \sqrt{3}y = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AF} = x + \frac{3}{2}z = 0 \end{cases}, \text{令 } z = 2, \text{ 则 } \vec{m} = (-3, 0, 2)$$

设平面  $BEF$  的法向量  $\vec{n} = (x, y, z)$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EB} = 2x - \sqrt{3}y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BF} = -x + \frac{3}{2}z = 0 \end{cases}, \text{令 } y = \sqrt{3}, \text{ 则 } \vec{n} = (\frac{3}{2}, \sqrt{3}, 1)$$

$$\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{-\frac{9}{2} + 2}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{\frac{9}{4} + 3 + 1}} = -\frac{\sqrt{13}}{13}$$

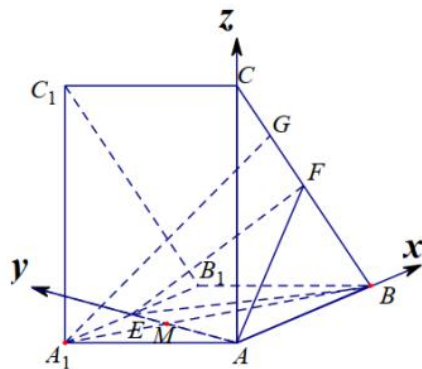
又二面角  $A-EF-B$  是锐角, 因此, 二面角  $A-EF-B$  的余弦值为  $\frac{\sqrt{13}}{13}$ . -----12分

20. 解: (1)  $A_1(-2, 0), A_2(2, 0)$ , 设  $P(x_0, y_0)$  ( $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$ ).

直线  $l_1$  的方程为:  $y = -\frac{x_0 + 2}{y_0}(x + 2)$

直线  $l_2$  的方程为:  $y = -\frac{x_0 - 2}{y_0}(x - 2)$  -----2分

$$\begin{cases} y = -\frac{x_0 + 2}{y_0}(x + 2) \\ y = -\frac{x_0 - 2}{y_0}(x - 2) \end{cases}, G(-x_0, -4y_0),$$
 -----3分



-----8分

-----10分

$$k_1 = \frac{y_0}{x_0}, k_2 = \frac{4y_0}{x_0} \therefore \frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{4} \quad \text{-----4分}$$

(2) 由(1)知: 设直线  $OP$  的方程:  $y = k_1x$ , 直线  $OQ$  的方程:  $y = 4k_1x$

$$\begin{cases} y = k_1x \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \text{得: } (4k_1^2 + 1)x^2 = 4, \text{ 由对称性, 不妨设 } x_p > 0, \therefore P\left(\frac{2}{\sqrt{4k_1^2 + 1}}, \frac{2k_1}{\sqrt{4k_1^2 + 1}}\right),$$

$$|OP| = \sqrt{1+k_1^2} \frac{2}{\sqrt{4k_1^2 + 1}} \quad \text{-----6分}$$

$$\begin{cases} y = 4k_1x \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \text{由(1)知, } x_p, x_Q \text{ 异号, } \therefore x_p, x_Q \text{ 异号, } \therefore Q\left(\frac{-2}{\sqrt{64k_1^2 + 1}}, \frac{-8k_1}{\sqrt{64k_1^2 + 1}}\right)$$

$$Q \text{ 到 } y = k_1x \text{ 的距离 } d = \frac{|6k_1|}{\sqrt{1+k_1^2} \sqrt{64k_1^2 + 1}} \quad \text{-----8分}$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle POQ} &= \frac{1}{2}|OP|d = \frac{1}{2}\sqrt{1+k_1^2} \frac{2}{\sqrt{4k_1^2 + 1}} \frac{|6k_1|}{\sqrt{1+k_1^2} \sqrt{64k_1^2 + 1}} = \frac{6|k_1|}{\sqrt{4k_1^2 + 1} \sqrt{64k_1^2 + 1}} \\ &= 6\sqrt{\frac{k_1^2}{(4k_1^2 + 1)(64k_1^2 + 1)}} = 6\sqrt{\frac{1}{256k_1^2 + 68 + \frac{1}{k_1^2}}} \quad \text{-----10分} \end{aligned}$$

$$\because 256k_1^2 + \frac{1}{k_1^2} \geq 32 \therefore S_{\triangle POQ} \leq \frac{3}{5}, \text{ 当且仅当 } k_1 = \pm \frac{1}{4} \text{ 取 “=” .}$$

$$\therefore (S_{\triangle POQ})_{\max} = \frac{3}{5} \quad \text{-----12分}$$

21. 解: (1)  $k=1$  时,  $f(x) = e^x - \ln x$

(方法一)  $f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增

$$\because f'\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0, f'(1) = e - 1 > 0, \therefore \text{存在 } x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \text{ 使得 } f'(x_0) = 0, \text{ 即 } e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$$

-----2分

当  $x \in (0, x_0)$  时,  $f'(x) < 0$ , 则  $f(x)$  在  $(0, x_0)$  上单调递减,



当  $x \in (x_0, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ , 则  $f(x)$  在  $(x_0, +\infty)$  上单调递增

$$\therefore f(x)_{\min} = f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 = \frac{1}{x_0} + x_0 > 2$$

$$\therefore f(x) > 2 \quad \text{-----4分}$$

(方法二)

设  $\varphi(x) = e^x - x - 1$ , 则  $\varphi'(x) = e^x - 1$ ,

当  $x > 0$  时,  $\varphi'(x) > 0$ ; 当  $x < 0$  时,  $\varphi'(x) < 0$

$\therefore \varphi(x)$  在区间  $(-\infty, 0)$  上单调递减,  $(0, +\infty)$  上单调递增.

$$\therefore \varphi(x) \geq \varphi(0) = 0, \text{ 即 } e^x \geq x + 1 \text{ (当且仅当 } x = 0 \text{ 时取等号)}, \quad \text{-----2分}$$

$$\therefore x \geq \ln(x+1) (x > -1), \text{ 则 } x - 1 \geq \ln x (x > 0), \text{ 即 } -\ln x \geq -(x-1) \text{ (当且仅当 } x = 1 \text{ 时取等号)}$$

因上述两个不等式等号不同时取到,  $\therefore e^x - \ln x > x + 1 - (x - 1)$

$$\therefore f(x) > 2. \quad \text{-----4分}$$

(2) (i) 由已知,  $k < f(1) = e$ , 且  $k$  为正整数,  $\therefore k = 1$  或  $k = 2$

①  $k = 1$  时, 令  $g(x) = e^x - \ln x - x$ ,

$$\therefore g'(x) = e^x - \frac{1}{x} - 1 \text{ 在区间 } [1, +\infty) \text{ 上单调递增,}$$

$$\therefore g'(x) \geq g'(1) = e - 2 > 0$$

$\therefore g(x)$  在区间  $[1, +\infty)$  上单调递增,

$$\therefore g(x) \geq g(1) = e - 1 > 0$$

即  $f(x) > x$  恒成立. -----6分

②  $k = 2$  时, 令  $h(x) = e^x - 4 \ln x - 2x$

$h'(x) = e^x - \frac{4}{x} - 2$  在区间  $[1, +\infty)$  上单调递增

$$\because h'(\frac{3}{2}) = e^{\frac{3}{2}} - \frac{14}{3} < 0, \quad h'(2) = e^2 - 4 > 0,$$

$\therefore$  存在  $x_1 \in (\frac{3}{2}, 2)$ , 使得  $h'(x_1) = 0$ ,

当  $x \in (\frac{3}{2}, x_1)$  时,  $h'(x) < 0$ , 则  $h(x)$  区间  $(\frac{3}{2}, x_1)$  上单调递减

$$\begin{aligned} \text{(方法一)} \quad h(x) &< h(\frac{3}{2}) = e^{\frac{3}{2}} - 4 \ln \frac{3}{2} - 3 = e^{\frac{3}{2}} - \ln \frac{81}{16} - 3 \\ &< e^{\frac{3}{2}} - \ln 5 - 3 < 2.72^{\frac{3}{2}} - 1.6 - 3 = 2.72^{\frac{3}{2}} - 4.6 < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(方法二)} \quad h(x) &< h(\frac{3}{2}) = e^{\frac{3}{2}} - 4 \ln \frac{3}{2} - 3 \\ &= e^{\frac{3}{2}} - 4(\ln 3 - \ln 2) - 3 < e^{\frac{3}{2}} - 4(1.09 - 0.70) - 3 < 2.72^{\frac{3}{2}} - 4.56 < 0 \end{aligned}$$

从而不满足  $f(x) > kx$  恒成立.

故  $k \neq 2$ .

综上, 正整数  $k$  的取值集合为  $\{1\}$ .

-----9分

(ii) (方法一)

由 (i) 知,  $k=1$  时,  $f(x) = e^x - \ln x > x$

令  $x = n (n \in N^*)$ , 则  $e^n - \ln n > n$ ,

$$\therefore e + e^2 + \dots + e^n - \ln(n!) > \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore \frac{e(e^n - 1)}{e - 1} - \ln(n!) > \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\because e > \frac{e}{e-1} \text{ 且 } e^n - 1 > 0, \therefore e^{n+1} > e(e^n - 1) > \frac{e}{e-1}(e^n - 1)$$

$$\therefore e^{n+1} > \frac{e}{e-1}(e^n - 1)$$

$$\therefore e^{n+1} - \ln(n!) > \frac{n^2 + n}{2} \quad (n \in N^*) \quad \text{-----12分}$$

(方法二) :

$$\text{设 } m(x) = e^x - ex, \quad m'(x) = e^x - e$$

当  $x \in (-\infty, 1)$ ,  $m'(x) < 0$ ,  $m(x)$  在  $(-\infty, 1)$  上递减, 在  $(1, +\infty)$  上递增

$$\therefore m(x)_{\min} = m(1) = 0, \quad \therefore e^x \geq ex \quad \therefore e^{\frac{x}{2}} \geq e \frac{x}{2} \quad \therefore e^x \geq \frac{e^2 x^2}{4} \quad \therefore e^{x+1} \geq \frac{e^3 x^2}{4}$$

$$\text{令 } x = n(n \in N^*), \quad e^{n+1} \geq \frac{e^3 n^2}{4} > 2n^2$$

$$\text{设 } n(x) = \ln x - x - 1, \quad n'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

$\therefore n(x)$  在  $(0, 1)$  上递增, 在  $(1, +\infty)$  上递减,  $\therefore n(x)_{\max} = n(1) = 0$

$$\therefore \ln x \leq x - 1 < x, \quad \text{令 } x = n(n \in N^*), \quad \ln n < n$$

$$\therefore e^{n+1} - \ln(n!) > 2n^2 - \ln 1 - \ln 2 - \dots - \ln n \geq 2n^2 - n \ln n > 2n^2 - n^2 = n^2 = \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} \geq \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$\therefore e^{n+1} - \ln(n!) > \frac{n^2 + n}{2} \quad (n \in N^*) \quad \text{-----12分}$$

选考题:

22. 解: (1)  $C_1$  的普通方程为  $\sqrt{3}x - y + 2 - \sqrt{3} = 0$ ,  $C_2$  的直角坐标方程为  $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ .

-----  
4分

$$(2) \text{曲线 } C_3 \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = 2 + \frac{1}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}) \quad \text{-----6分}$$

$$\text{代入 } C_2, \text{ 得 } t^2 - 3\sqrt{3}t + 1 = 0, \quad \Delta > 0 \quad t_1 + t_2 = 3\sqrt{3}, \quad t_1 t_2 = 1 > 0 \quad \text{-----8分}$$

$$|PA| + |PB| = |t_1| + |t_2| = |t_1 + t_2| = 3\sqrt{3} \quad \text{-----10分}$$

23. 解: (1)  $|x-2| + |x+1| \leq 4$

当  $x < -1$  时,  $-2x+1 \leq 4, \therefore -\frac{3}{2} \leq x < -1$

当  $-1 \leq x \leq 2$  时,  $3 \leq 4$  恒成立,  $\therefore -1 \leq x \leq 2$

当  $x > 2$  时,  $2x-1 \leq 4, \therefore 2 < x \leq \frac{5}{2}$  -----3分

所以不等式的解集为  $\left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ . -----5分

(2) (方法一):  $f(x) = \begin{cases} -2x+1, & x < -1 \\ 3, & -1 \leq x \leq 2 \\ 2x-1, & x > 2 \end{cases}$

$\therefore f(x)$  在区间  $(-\infty, -1)$  上单调递减, 在区间  $(2, +\infty)$  上单调递增,

所以当  $-1 \leq x \leq 2$  时,  $f(x)$  取最小值3, 即  $m = 3$ . -----7分

(方法二):

$|x-2| + |x+1| \geq |(x-2) - (x+1)| = 3$ , 当且仅当  $-1 \leq x \leq 2$  等号取到,

$\therefore f(x)$  取最小值3, 即  $m = 3$  -----7分

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 3$$

$\because a > 0, b > 0, c > 0$

由柯西不等式知  $(a+2b+3c)\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}\right) \geq (1+2+3)^2 = 36$

当且仅当  $a = b = c = 2$  时取等号,

$\therefore a + 2b + 3c$  的最小值是12. -----10分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线