怀化市 2023 年上期高二年级期末考试试题

数　学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3. 考试结束后，将本试题卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\{x|x^2\geq 4\}$，$N=\{x|1<x<3\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A. $\{x|-2\leq x<1\}$　　B. $\{x|1<x\leq 2\}$　　C. $\{x|2\leq x<3\}$　　D. $\{x|x<2\}$

2. 若复数 z 满足 $(1+z)(1-i)=1$，则 $|z|=$（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

3. 下列说法中不正确的是（　　）

A. 线性回归直线必过样本数据的中心点 $(\overline{x}, \overline{y})$

B. 当样本相关系数 $r>0$ 时，成对数据正相关

C. 如果成对数据的线性相关性越强，则样本相关系数 r 就接近于 1

D. 残差图中残差点所在的水平带状区域越宽，则回归方程的预报精确度越低

4. 在 $\triangle ABC$，“$\tan A\tan B<1$”是“$\triangle ABC$ 为钝角三角形”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 通过随机询问 200 名性别不同的学生是否喜欢某项体育运动，得到如下的列联表：

	男	女	总计
喜欢	125	25	150
不喜欢	35	15	50
总计	160	40	200

则根据列联表可得（　　）

参考公式：独立性检验统计量 $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

参考数据：

$P\left(\chi^2 \geq k\right)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

A. 有 95%以上的把握认为“喜欢该项运动与性别有关”

B. 有 95%以上的把握认为“喜欢该项运动与性别无关”

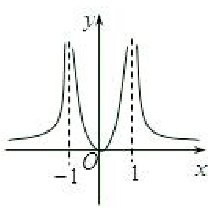
C. 有 97.5%以上的把握认为“喜欢该项运动与性别有关”

D. 有 97.5%以上的把握认为“喜欢该项运动与性别无关”

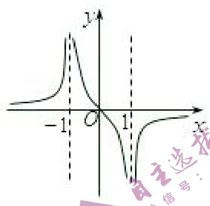
6. 中国是世界上最大的棉花生产国和消费国. 新疆、山东、河北、河南是我国排在前四名的棉花产区，5 位同学 *A, B, C, D, E* 准备在暑假前往上述 4 个省、区进行与棉花生产有关的研学旅行，要求每个地方至少有一个同学去，且每个同学只去一个省、区，则不同的研学旅行方案有（　　）

A. 480　　B. 240　　C. 220　　D. 180

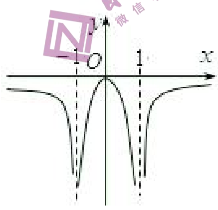
7. 函数 $f(x)=\ln\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|$ 的大致图象为（　　）



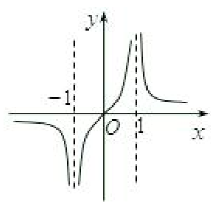
A.



B.



C.



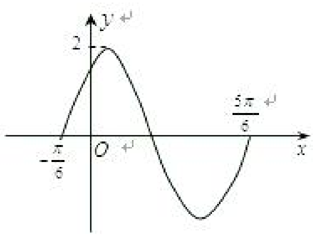
D.

8. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=1$，且对任意的正整数 m,n 都有 $a_{m+n}=a_m+a_n+mn$，则 $S_{2023}=$（　　）

A. C_{2024}^2　　B. C_{2024}^3　　C. C_{2025}^2　　D. C_{2025}^3

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项是符合题目要求的，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi\right)$ 的部分图象如图所示，则（　　）



A. $A=2$　　B. $\omega=2$　　C. $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$　　D. $f\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 为奇函数

10. 投掷一枚均匀的骰子 8 次，记录每次骰子出现的点数.根据统计结果，可以判断一定出现点数 6 的是（　　）

A. 第 25 百分位数为 2，极差为 4

B. 平均数为 3.5，第 75 百分位数为 3.5

C. 平均数为 3，方差为 3

D. 众数为 4，平均数为 4.75

11. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P, P_1 分别是棱 CD, C_1D_1 的中点，则（　　）

A. AP_1 // 平面 BC_1P　　　　B. 平面 B_1DP_1 // 平面 BC_1P

C. $A_1P\perp$ 平面 B_1DP_1　　　　D. 平面 $B_1DP_1\perp$ 平面 B_1CD

12. 设双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a}-\dfrac{y^2}{a^2-a+4}=1\,(a>0)$，直线 l 与双曲线 C 的右支交于点 A, B，则（　　）

A. 双曲线 C 的离心率的最小值为4

B. 离心率最小时，双曲线 C 的渐近线方程为 $\sqrt{3}x\pm y=0$

C. 若直线 l 同时与两条渐近线相交于点 D, E，则 $|AD|=|BE|$

D. 若 $a=1$，双曲线在点 A 处的切线与两条渐近线相交于点 M, N，则 $S_{\triangle MON}$ 为定值

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\left(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中的常数项为__________.（用数字作答）

14. 某品牌手机的电池使用寿命 X（单位：年）服从正态分布，且使用寿命不少于 1 年的概率为 0.9，使用寿命不少于 9 年的概率为 0.1，则该品牌手机的电池使用寿命不少于 5 年且不多于 9 年的概率为___________.

15. 口袋里有若干大小完全相同的白、红、黑三种颜色的小球，其中只有 1 个白球. 某同学拟用独立重复实验的方法计算其中红球的数量，有放回地取球 30 次，每次取 2 个球，发现取到白球的次数为 10，取到 1 个红球 1 个黑球次数最多为 12，取到 2 个都是红球的次数最少，则红球的个数为________.

16. 已知 x_0 是方程 $e^{3x}-\ln x+2x=0$ 的一个根，则 $\dfrac{\ln x_0}{x_0}=$______________.

四、解答题：共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题 10 分)

设锐角三角形 ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$b^2=a^2+c^2-\sqrt{3}ac$.

(1) 求 B 的大小；

(2) 求 $\cos A+\sin C$ 的取值范围.

18. (本题 12 分)

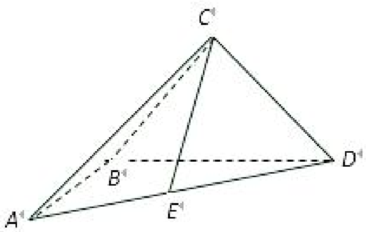
已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_4=9$，$S_3=15$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n=\cos\dfrac{a_n}{3}\pi$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求 T_{2023}.

19. (本题 12 分)

如图，在三棱锥 $C-ABD$ 中，$AB\perp BD$，且 $\angle ADB=30^\circ$，$BC\perp CD$，$BC=CD$，E 是 AD 的中点，$AB=CE$.



⑴ 求证：平面 $ABD \perp$ 平面 BCD；

⑵ 求平面 ACD 与平面 BCD 的夹角的余弦值.

20. (本题 12 分)

新高考数学试卷中的多项选择题，给出的 4 个选项中有 2 个以上选项是正确的，每一道题考生全部选对得 5 分. 对而不全得 2 分，选项中有错误得 0 分. 设一套数学试卷的多选题中有 2 个选项正确的概率为 $p(0<p<1)$，有 3 个选项正确的概率为 $1-p$，没有 4 个选项都正确的（在本问题中认为其概率为 0）. 在一次模拟考试中：

⑴ 小明可以确认一道多选题的选项 A 是错误的，从其余的三个选项中随机选择 2 个作为答案，若小明该题得 5 分的概率为 $\frac{1}{12}$，求 p；

⑵ 小明可以确认另一道多选题的选项 A 是正确的，其余的选项只能随机选择. 小明有三种方案：①只选 A 不再选择其他答案；②从另外三个选项中再随机选择 1 个，共选 2 个；③从另外三个选项中再随机选择 2 个，共选 3 个. 若 $p=\frac{5}{12}$，以最后得分的数学期望为决策依据，小明应该选择哪个方案？

21. (本题 12 分)

已知 $A(-2\sqrt{2},0)$， $B(2\sqrt{2},0)$，直线 PA, PB 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$，记动点 P 的轨迹为曲线 C.

⑴ 求曲线 C 的方程；

⑵ 若直线 l 与曲线 C 交于 M，N 两点，O 为坐标原点，直线 OM，ON 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$，求证：ΔMON 的面积为定值.

22. (本题 12 分)

已知函数 $f(x)=(1-ax)e^x$， $a\in R$.

⑴ 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

⑵ 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，存在 $m,n\in(0,+\infty)$ 满足 $f(m)=f(n)$，证明 $m+n>2-\frac{2}{e}$.

怀化市 2023 年上学期期末考试

高二数学参考答案

一、单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	C	C	A	B	B	D

二、多项选择题

题号	9	10	11	12
答案	ABD	BD	BD	BCD

三、填空题

题号	13	14	15	16
答案	-160	0.4	2	3

四、解答题

17.【解析】（1）由 $b^2=a^2+c^2-\sqrt{3}ac$，根据余弦定理得 $\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$……3 分

又 B 为锐角三角形 $\triangle ABC$ 的内角，得 $B=\dfrac{\pi}{6}$……4 分

（2）由（1）知 $A+C=\dfrac{5\pi}{6}$，$C=\dfrac{5\pi}{6}-A$……5 分

所以 $\cos A+\sin C=\cos A+\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}-A\right)=\sqrt{3}\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)$……7 分

由 $\triangle ABC$ 为锐角三角形得 $\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2}\\ A+\dfrac{\pi}{6}>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{\pi}{3}<A<\dfrac{\pi}{2}$……8 分

所以 $\dfrac{2\pi}{3}<A+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5\pi}{6}$，$\dfrac{1}{2}<\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{3}\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)<\dfrac{3}{2}$……9 分

故 $\cos A+\sin C$ 的取值范围为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$……10 分

18.【解析】（1）由设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $\begin{cases}a_1+3d=9\\3a_1+3d=15\end{cases}$……2 分

解得 $d=2$，$a_1=3$……4 分

所以 $a_n=2n+1$……5 分

（2）由 $a_n=2n+1$，可得 $b_n=\cos\dfrac{2n+1}{3}\pi$ ……6 分

数列的周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=6$ ……7 分

所以 $b_1+b_2+\cdots+b_6=\cos\dfrac{3}{3}\pi+\cos\dfrac{5}{3}\pi+\cdots+\cos\dfrac{13}{3}\pi=0$ ……9 分

所以 $T_{2023}=b_1+b_2+\cdots+b_{2023}=b_1+337\times 0=b_1=-1$ ……12 分

19.【解析】（1）证明：如图，取 BD 的中点 O，连 CO，EO，得 $EO\parallel AB$ ……1 分

又 $AB\perp ED$，所以 $EO\perp BD$ ……2 分

设 $AB=2$，则 $EO=1$，$BD=2\sqrt{3}$，$CO=\sqrt{3}$，

$CE=AB=2$ ……3 分

所以 $CE^2=CO^2+EO^2$，所以 $EO\perp CO$ ……4 分

又 $CO\cap BD=O$，所以 $EO\perp$ 平面 BCD ……5 分

又 $EO\subset$ 平面 ABD，所以平面 $ABD\perp$ 平面 BCD.

注：以下两种证法相应记分

①证 $\triangle EOD\cong\triangle COE$，得 $\angle COE=\angle EOD=90^\circ$；

②由 $CE=EA=ED$ 得 $DC\perp CA$，从而得 $AB\perp CD$.

（2）因为 $BC=CD$，O 是 BD 的中点，所以 $CO\perp BD$，（1）中已证 $EO\perp BD$，$EO\perp CO$，

如图所示，分别以 $\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OC}$ 所在的方向为 x，y，z 轴正方向建立空间直角坐标系，……7 分

设 $AB=2$，则 $A\left(2,-\sqrt{3},0\right)$，$D\left(0,\sqrt{3},0\right)$，$C\left(0,0,\sqrt{3}\right)$，

所以 $\overrightarrow{AD}=\left(-2,2\sqrt{3},0\right)$，$\overrightarrow{CD}=\left(0,\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$ ……8 分

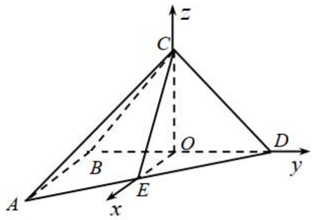
设平面 PCD 的法向量为 $\vec{m}=\left(x,y,z\right)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AD}=-2x+2\sqrt{3}y=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CD}=\sqrt{3}y-\sqrt{3}z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x+\sqrt{3}y=0\\ y-z=0\end{cases}$，

取 $\vec{m}=\left(\sqrt{3},1,1\right)$ ……9 分

又平面 BCD 的一个法向量为 $\vec{n}=\left(1,0,0\right)$ ……10 分

所以 $\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times 1}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ ……11 分

所以，平面 ACD 与平面 BCD 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ ……12 分



20.【解析】记一道多选题“有 2 个选项正确”为事件 A_1，“有 3 个选项正确”为事件 A_2，“小明该题得 5 分”为事件 B，则

（1）$P(B)=P\left(BA_1\right)=P\left(A_1\right)\times P\left(B\middle|A_1\right)=p\times\frac{1}{C_3^2}=\frac{1}{12}$，求得 $p=\frac{1}{4}$……4 分

（2）若小明选择方案①，则小强的得分为 2 分……5 分

若小明选择方案②，记小强该题得分为 X，则 $X=0,2,5$，且

$$P(X=0)=P\left(A_1\right)\frac{C_2^1}{C_3^1}+P\left(A_2\right)\frac{C_1^1}{C_3^1}=\frac{5}{12}\times\frac{2}{3}+\frac{7}{12}\times\frac{1}{3}=\frac{17}{36},$$

$$P(X=2)=P\left(A_2\right)\frac{C_2^1}{C_3^1}=\frac{7}{12}\times\frac{2}{3}=\frac{14}{36}=\frac{7}{18},\ P(X=5)=P\left(A_1\right)\frac{C_1^1}{C_3^1}=\frac{5}{12}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{36},$$

所以，$E(X)=0\times\frac{17}{36}+2\times\frac{14}{36}+5\times\frac{5}{36}=\frac{53}{36}$……8 分

若小明选择方案③，记小强该题得分为 Y，则 $Y=0,5$，且

$$P(Y=0)=P\left(A_1\right)\frac{C_3^2}{C_3^2}+P\left(A_2\right)\frac{C_1^1C_2^1}{C_3^2}=\frac{5}{12}+\frac{7}{12}\times\frac{2}{3}=\frac{29}{36},$$

$$P(Y=5)=P\left(A_2\right)\frac{C_2^2}{C_3^2}=\frac{7}{12}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{36}，所以，E(Y)=0\times\frac{29}{36}+5\times\frac{7}{36}=\frac{35}{36}$$……11 分

因为 $E\left(Y\right)<E\left(X\right)<2$，所以小明应选择方案①……12 分

21.【解析】（1）设 $P\left(x,y\right)$，由已知 $\frac{y}{x+2\sqrt{2}}\cdot\frac{y}{x-2\sqrt{2}}=-\frac{3}{4}$……2 分

化简得曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1(y\neq 0)$……4 分

（2）①直线 l 的斜率不存在时，设 l 的方程为 $x=m(-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2})$，

联立 $\begin{cases}x=m\\3x^2+4y^2=24\end{cases}$，解得 $M\left(m,\frac{\sqrt{24-3m^2}}{2}\right)$，$N\left(m,-\frac{\sqrt{24-3m^2}}{2}\right)$，

由 $k_{OM}\cdot k_{ON}=-\dfrac{3}{4}$ 得 $\dfrac{\sqrt{24-3m^2}}{2m}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{24-3m^2}}{2m}\right)=-\dfrac{3}{4}$，即 $m=\pm2$，

所以 $|MN|=\sqrt{24-3m^2}=2\sqrt{3}$，$S_{\triangle OMN}=\dfrac{1}{2}|MN||m|=2\sqrt{3}$ ……6 分

②直线 l 的斜率存在时，设 l 的方程为 $y=kx+n$，

联立 $\begin{cases} y=kx+n \\ 3x^2+4y^2=24 \end{cases}$，消去 y 得 $\left(3+4k^2\right)x^2+8knx+4n^2-24=0$ ……7 分

设 $M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{8kn}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4n^2-24}{3+4k^2}$ ……8 分

所以 $y_1y_2=\left(kx_1+n\right)\left(kx_2+n\right)=k^2x_1x_2+kn\left(x_1+x_2\right)+n^2=\dfrac{3n^2-24k^2}{3+4k^2}$，

由 $k_{OM}\cdot k_{ON}=-\dfrac{3}{4}$ 得 $\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=\dfrac{3n^2-24k^2}{4n^2-24}=-\dfrac{3}{4}$，化简得 $n^2=4k^2+3$ ……9 分

所以 $|MN|=\sqrt{\left(1+k^2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2\right]}=\sqrt{\left(1+k^2\right)\left[\left(-\dfrac{8kn}{3+4k^2}\right)^2-4\dfrac{4n^2-24}{3+4k^2}\right]}$

$=\dfrac{4\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}\sqrt{3\left(8k^2+6-n^2\right)}=4\sqrt{3}\cdot\sqrt{\dfrac{1+k^2}{3+4k^2}}$ ……10 分

又点 O 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{|n|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{\dfrac{4k^2+3}{1+k^2}}$ ……11 分

所以 $S_{\triangle OMN}=\dfrac{1}{2}|MN|d=\dfrac{1}{2}\cdot4\sqrt{3}\cdot\sqrt{\dfrac{1+k^2}{3+4k^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{4k^2+3}{1+k^2}}=2\sqrt{3}$，