数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	B	A	D	B	D	C	AD	ABD	AC	ACD

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. D 【解析】集合 B 中元素包含的整数有 $-3,-2,-1,0,1,2,3$，以上整数满足集合 A 中不等式的有 $-3,-2,-1,1,2$，故 $A\cap B$ 中整数个数为 5，故选 D.

2. B 【解析】设圆锥的底面圆半径为 r，高为 h，由已知，$5\pi r=20\pi$，则 $r=4$，从而 $h=\sqrt{25-r^2}=3$，

所以 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi}{3}\times16\times3=16\pi$，选 B.

3. B 【解析】$\because 0°<A,B<90°<A+B<180°$，$\therefore 90°>A>90°-B>0°$，$\sin A>\cos B$，$\cos A<\sin B$，

故 $\cos B-\sin A<0$，$\sin B-\cos A>0$，即点 Z 位于第二象限. 选 B.

4. A 【解析】在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{d}$，

$\therefore \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{0}$. 故选：A.

5. D 【解析】由题意，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和满足 $a_{n+1}=2S_n(n\in\mathbf{N}^*)$，

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=2S_{n-1}$，两式相减，可得 $a_{n+1}-a_n=2(S_n-S_{n-1})=2a_n$，

可得 $a_{n+1}=3a_n$，即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3(n\geqslant2)$，

又由 $a_1=1$，当 $n=1$ 时，$a_2=2S_1=2$，所以 $\frac{a_2}{a_1}=2$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases}1,n=1,\\2\cdot3^{n-2},n\geqslant2,\end{cases}$ 故数列 $\{a_n\}$ 既不是等差数列也不是等比数列.

当 $n\geqslant2$ 时，$S_n=\frac{1}{2}a_{n+1}=3^{n-1}$，又由 $n=1$ 时，$S_1=a_1=1$，适合上式，

所以数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=3^{n-1}$；又由 $\frac{S_{n+1}}{S_n}=3$，所以数列 $\{S_n\}$ 为公比为 3 的等比数列，

综上可得选项 D 是正确的.

6. B 【解析】设经过 x 小时，血液中的酒精含量为 y，则 $y=0.3\times(1-25\%)^x=0.3\times0.75^x$.

由 $0.3\times0.75^x\leqslant0.09$，得 $0.75^x\leqslant0.3$，则 $x\lg0.75\leqslant\lg0.3$. 因为 $\lg0.75<0$，则

$x\geqslant\frac{\lg0.3}{\lg0.75}=\frac{\lg3-1}{\lg3-\lg4}\approx\frac{0.477-1}{0.477-0.602}=\frac{523}{125}=4.184<4.2$，所以开车前至少要休息 4.2 小时，选 B.

7. D 【解析】设 $g(x)=f^2(x)-2\cos x$，则 $g'(x)=2f(x)\cdot f'(x)+2\sin x>0$，

故 $y=g(x)$ 在定义域上是增函数，所以 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)>g\left(-\frac{\pi}{2}\right)$，

即 $f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)>f^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|>\left|f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right|$，故选 D.

8. C 【解析】设正三棱锥的底边长为 a，侧棱长为 b，

$1=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AP}|^2=a^2+a^2+b^2+a^2+a^2+a^2=5a^2+b^2$，

又 $V_{P\text{-}ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\sqrt{b^2-\frac{1}{3}a^2}=\frac{1}{12}\sqrt{3a^4-16a^6}$.

设 $f(x)=3x^4-16x^6(x>0)$，$f'(x)=12x^3-96x^5=12x^3(1-8x^2)$，

$y=f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ 上存在唯一的极值点 $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$，且在 $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时取得最大值为 $\frac{1}{64}$.

故正三棱锥 P-ABC 体积的最大值为 $\frac{1}{96}$，故选 C.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. AD 【解析】对于 A，$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}>0$，又 $b-a<0$，故 $ab<0$，A 正确.

对于 B，若 $a<b<0$，则 $a^2>b^2$，故 B 错误.

对于 C，$\frac{a}{c-a}-\frac{b}{c-b}=\frac{ac-ab-bc+ab}{(c-a)(c-b)}=\frac{(a-b)c}{(c-a)(c-b)}$，

$\because c>a>b>0$，$\therefore c-a>0$，$c-b>0$，$a-b>0$，

$\therefore \frac{(a-b)c}{(c-a)(c-b)}>0$，$\therefore \frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$，所以 C 错误.

对于 D，$\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}=\frac{ab+ac-ab-bc}{b(b+c)}=\frac{(a-b)c}{b(b+c)}$，

$\because a>b>c>0$，$\therefore a-b>0$，$b+c>0$，

$\therefore \frac{(a-b)c}{b(b+c)}>0$，$\therefore \frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$，所以 D 正确.

10. ABD 【解析】不妨设正方体的棱长为 $2a$，则 $FG=\sqrt{2}a$，$EF=\sqrt{2}a$，$EG=\sqrt{6}a$，

从而 $\angle EFG=120^\circ$，$\angle EGF=30^\circ$，故 $\angle EFG=4\angle EGF$，选项 A 正确.

由于平面 EGF // 平面 CD_1B_1，又平面 CD_1B_1 的法向量之一 $\overrightarrow{C_1A}$ 与正方体各面的夹角相等，即平面 EGF 与正方体各面夹角相等，选项 B 正确.

由于 FG 与 ED_1 异面，故选项 C 错误.

由于 CD_1 // 平面 EFG，C、D_1 到平面 EFG 距离相等，故选项 D 正确.

11. AC 【解析】对于 A 项，由题意得，$f(x)$ 在 (x_0,x_0+1) 的区间中点处取得最大值，即 $f\left(x_0+\frac{1}{2}\right)=1$，所以 A 正确；

对于 B 项，假设若 $x_0=0$，则 $f(x)=\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)$ 成立，由 A 项知，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，

而 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\neq 1$，故假设不成立，则 B 项错误；

对于 C 项，$f(x_0)=f(x_0+1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且 $f(x)$ 在 (x_0,x_0+1) 上有最大值，无最小值，

不妨令 $\omega x_0+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{4}$，$\omega(x_0+1)+\varphi=2k\pi+\frac{3\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，

则两式相减，得 $\omega=\frac{\pi}{2}$，即函数的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=4$，故 C 项正确；

对于 D 项，因为 $T=4$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2024)$ 上的长度恰好为 506 个周期，

当 $f(0)=0$，即 $\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,2024)$ 上的零点个数至少为 $506\times2-1=1011$ 个，故 D 项错误.

故选 AC.

12. ACD 【解析】设 $f(x)=\frac{x}{e^x}$，得 $f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，则 $f(x)_{\max}=f(1)=\frac{1}{e}$. 设 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，得 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，则 $g(x)_{\max}=f(e)=\frac{1}{e}$. 从而可得 $0<x_1<1<x_2<e<x_3$. 由 $\frac{x_2}{e^{x_2}}=a$，得 $x_2=ae^{x_2}$，故 A 正确；

由 $\frac{x_1}{e^{x_1}}=\frac{\ln x_2}{x_2}$，得 $\frac{x_1}{e^{x_1}}=\frac{\ln x_2}{e^{\ln x_2}}$，即 $f(x_1)=f(\ln x_2)$，又 $0<x_1<1<x_2<e$，得 $0<\ln x_2<1$，则 $x_1=\ln x_2$，故 B 错误；

由 $\frac{x_2}{e^{x_2}}=\frac{\ln x_3}{x_3}$，得 $\frac{\ln e^{x_2}}{e^{x_2}}=\frac{\ln x_3}{x_3}$，即 $g(e^{x_2})=g(x_3)$. 又由 $1<x_2<e<x_3$，即 $e^{x_2}>e$，则 $e^{x_2}=x_3$，故 C 正确；

由前面知 $x_1=\ln x_2$，$e^{x_2}=x_3$，得 $x_1x_3=e^{x_2}\ln x_2$，又由 $\frac{x_2}{e^{x_2}}=\frac{\ln x_2}{x_2}=a$，得 $e^{x_2}=\frac{x_2}{a}$，$\ln x_2=ax_2$，则 $x_1x_3=x_2^2$，$x_1+x_3>2\sqrt{x_1x_3}=2x_2$.

故 D 正确. 综上选 ACD.

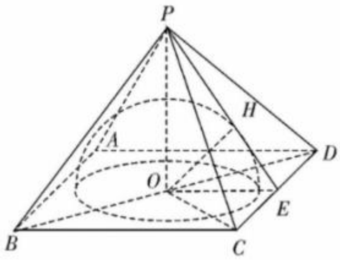
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 1 【解析】$f'(x)=(x+a+1)e^x$，因为 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线与直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 垂直，故切线的斜率为 2，所以 $f'(0)=a+1=2$，解得 $a=1$.

14. -2 【解析】由题意知直线 $y=kx+3$ 过圆心$(1,1)$，

即 $1=k+3$，解得 $k=-2$.

15. $\frac{\sqrt{3}}{18}$ 【解析】如图，连接 PO,BD，取 CD 的中点 E，连接 PE,OE，过点 O 作 $OH\perp PE$ 于点 H. 易知 $PO\perp$底面 $ABCD$，



设 $AB=4$，则 $BD=\sqrt{BA^2+BC^2}=4\sqrt{2}$，$BO=\frac{1}{2}BD=2\sqrt{2}$，$PO=\sqrt{BP^2-BO^2}=2\sqrt{2}$，

则 O 为球 M 的球心，

设球 M 的半径为 R，半球 O 的半径为 R_0，则 $R=2\sqrt{2}$. 易知 $R_0=OH$.

在等边三角形 PCD 中，$PE=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

由 $\mathrm{Rt}\triangle PHO\backsim\mathrm{Rt}\triangle POE$，

则 $\frac{R_0}{R}=\frac{OH}{PO}=\frac{OE}{PE}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，

故 $\frac{V_{半球O}}{V_{球M}}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{4\pi R_0^3}{3}}{\frac{4\pi R^3}{3}}=\frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{18}$.

16. (1)2 (2)$\begin{cases}n(1\leqslant n\leqslant 2022),\\ 2022\cdot(-1)^n(n\geqslant 2023)\end{cases}$ (答案不唯一)(第一空 2 分，第二空 3 分)

【解析】(1)当 $n=2$ 时，$2a_1+2a_2+a_3=a_3^2$，

又 $a_1=1$，$a_3=-2$，代入上式可求得 $a_2=2$.

(2)已知 $S_{n+1}+S_n=a_{n+1}^2$，得 $2S_n=a_{n+1}^2-a_{n+1}$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$2a_n=2(S_n-S_{n-1})=(a_{n+1}^2-a_{n+1})-(a_n^2-a_n)$，

即 $(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-1)=0$，

所以 $a_{n+1}=-a_n$ 或 $a_{n+1}=a_n+1$，

又 $a_1=1$，$a_{2023}=-2022$，

所以 $a_n=\begin{cases}n(1\leqslant n\leqslant 2022),\\ 2022\cdot(-1)^n(n\geqslant 2023)\end{cases}$ (答案不唯一).

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】(1)在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理知，

$\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$，

所以 $BD\cdot\sin\angle CBD=CD\cdot\sin\angle BCD$， ………………(2 分)

因为 $\angle BCD=135°$，$BD=\sqrt{5}CD=\sqrt{10}$，

所以 $\sin\angle CBD=\frac{\sqrt{10}}{10}$. ………………(4 分)

(2)在 $\triangle BCD$ 中，$\angle BCD=135°$，则 $\angle CBD$ 为锐角，

因为 $\sin\angle CBD=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

所以 $\cos\angle CBD=\frac{3\sqrt{10}}{10}$， ………………(6 分)

在梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，$\angle BCD=135°$，

则 $\angle CBA=45°$，

所以 $\sin\angle ABD=\sin(45°-\angle CBD)=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

显然 $\angle ABD$ 为锐角，所以 $\cos\angle ABD=\frac{2\sqrt{5}}{5}$， ………………(8 分)

因为 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot BD\cdot\sin\angle ABD=4$，

所以 $AB=4\sqrt{2}$，所以 $AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos\angle ABD=10$，

所以 $AD=\sqrt{10}$. ………………………………………………………………………… (10 分)

18.【解析】(1)由已知，$(n+1)a_n=na_{n-1}+1$，即 $(n+1)a_n-na_{n-1}=1(n\geqslant 2)$，则

数列 $\{(n+1)a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列. ……………………………………………… (3 分)

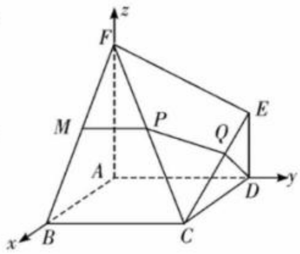
又 $(1+1)a_1=2a_1=1$，则 $(n+1)a_n=n$，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=\frac{n}{n+1}$. ……………………… (5 分)

(2)因为 $a_n=\frac{n}{n+1}$，则 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{n(n+2)}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$. ……………………… (8 分)

所以 $\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n+1}}{a_n}=n+\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$ ……… (10 分)

$=n+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=n+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)<n+\frac{3}{4}$. ……………………… (12 分)

19.【解析】(1)如图，取 P 为 FC 的中点，Q 为 EC 靠近点 E 的三等分点. ……………… (2 分)



理由如下：

由四边形 $ABCD$ 为正方形得，$AD/\!/BC$，

又 $BC\subset$ 平面 FBC，$AD\not\subset$ 平面 FBC，所以 $AD/\!/$ 平面 FBC. ……………………… (3 分)

又平面 $ADM\cap$ 平面 $FBC=MP$，M 为 FB 的中点，

得 $AD/\!/MP$，且 P 为 FC 的中点.

由题意知，平面 $ABF/\!/$ 平面 DCE，平面 $ADM\cap$ 平面 $DCE=DQ$，

AM 平分 $\angle FAB$，得 DQ 平分 $\angle EDC$，……………………………………………… (5 分)

又 $\frac{ED}{DC}=\frac{1}{2}$，得到 Q 为 EC 的三等分点，且 $QC=2EQ$，

从而作出线段 PQ. ……………………………………………………………………… (6 分)

(2)由题意，可建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，则

$A(0,0,0)$，$C(2,2,0)$，$F(0,0,2)$，$B(2,0,0)$，$D(0,2,0)$，

于是 $\overrightarrow{BF}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$，……………………………… (7 分)

设 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BF}(0<\lambda\leqslant 1)$，则 M 的坐标为 $(2-2\lambda,0,2\lambda)$.

设平面 DAM 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}(2-2\lambda)x+2\lambda z=0,\\ 2y=0,\end{cases}$

令 $x=1$，得平面 APQ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=\left(1,0,1-\frac{1}{\lambda}\right)$. ……………………… (9 分)

设直线 AC 与平面 α 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{AC}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{AC}|}$，

假设存在点 M 使得直线 AC 与平面 α 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$，

则有 $\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{2}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，解得 $\lambda=\frac{1}{3}$，$MB=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ……………………… (11 分)

所以线段 BF 上存在点 M，位于靠近点 B 的三等分点处，使得直线 AC 与平面 α 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$. ……………… (12 分)

20.【解析】(1)某企业原有 400 名技术人员，年人均投入 a 万元($a>0$)，现为加大对研发工作的投入，该企业把原有技术人员分成技术人员和研发人员，其中技术人员 x 名($x\in\mathbf{N}$ 且 $100\leqslant x\leqslant 275$)，调整后研发人员的年人均投入增加 $(4x)\%$，技术人员的年人均投入调整为 $a\left(m-\frac{2x}{25}\right)$ 万元，

可得调整后研发人员的年人均投入为 $[1+(4x)\%]a$ 万元，

则 $(400-x)[1+(4x)\%]a\geqslant 400a$，$(a>0)$，……………………………………………… (2 分)

整理得 $0.04x^2-15x\leqslant 0$，解得 $0\leqslant x\leqslant 375$，

因为 $x\in\mathbf{N}$ 且 $100\leqslant x\leqslant 275$，所以 $100\leqslant x\leqslant 275$，

故 $125\leqslant 400-x\leqslant 300$，

所以要使这$(400-x)$名研发人员的年总投入不低于调整前400名技术人员的年总投入，调整后的研发人员最少为125人. …………（5分）

(2)由条件①研发人员的年总投入始终不低于技术人员的年总投入，

得 $(400-x)[1+(4x)\%]a\geqslant x\left(m-\frac{2x}{25}\right)a$，…………（6分）

上式两边同除以 ax 得 $\left(\frac{400}{x}-1\right)\left(1+\frac{x}{25}\right)\geqslant m-\frac{2x}{25}$，整理得 $m\leqslant\frac{400}{x}+\frac{x}{25}+15$；

由条件②由技术人员年人均投入不减少，得 $a\left(m-\frac{2x}{25}\right)\geqslant a$，解得 $m\geqslant\frac{2x}{25}+1$；…………（8分）

假设存在这样的实数 m，使得技术人员在已知范围内调整后，满足以上两个条件，

即 $\frac{2x}{25}+1\leqslant m\leqslant\frac{400}{x}+\frac{x}{25}+15(100\leqslant x\leqslant 275)$ 恒成立，

因为 $\frac{400}{x}+\frac{x}{25}+15\geqslant 2\sqrt{\frac{400}{x}\cdot\frac{x}{25}}+15=23$，…………（10分）

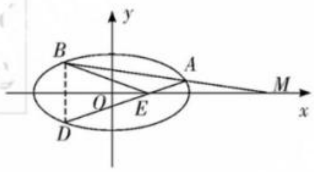
当且仅当 $\frac{400}{x}=\frac{x}{25}$，即 $x=100$ 时等号成立，所以 $m\leqslant 23$，

又因为 $100\leqslant x\leqslant 275$，当 $x=275$ 时，$\frac{2x}{25}+1$ 取得最大值23，所以 $m\geqslant 23$，

所以 $23\leqslant m\leqslant 23$，即 $m=23$，

即存在这样的 m 满足条件，其范围为 $m\in\{23\}$. …………（12分）

21.【解析】(1)设椭圆的半长轴长、半短轴长、半焦距分别为 a,b,c，



因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，则 $a=2c$. …………（1分）

因为 $|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=6$，则 $2a+2c=6$，即 $a+c=3$. …………（2分）

于是 $2c+c=3$，解得 $c=1$，从而 $a=2$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$. …………（3分）

因为椭圆的焦点在 x 轴上，所以椭圆 C 的标准方程是 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………（4分）

(2)设直线 l 的方程为 $x=ty+4(t\neq 0)$，代入椭圆方程，得 $3(ty+4)^2+4y^2=12$，即 $(3t^2+4)y^2+24ty+36=0$.

设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=-\frac{24t}{3t^2+4}$，$y_1y_2=\frac{36}{3t^2+4}$. …………（6分）

因为点 B,D 关于 x 轴对称，则 $D(x_2,-y_2)$. 设点 $E(x_0,0)$，

因为 A,E,D 三点共线，则 $k_{AE}=k_{DE}$，即 $\frac{y_1}{x_1-x_0}=\frac{-y_2}{x_2-x_0}$，

即 $y_1(x_2-x_0)=-y_2(x_1-x_0)$，即 $y_1x_2+y_2x_1=x_0(y_1+y_2)$，得

$x_0=\frac{y_1x_2+y_2x_1}{y_1+y_2}=\frac{y_1(ty_2+4)+y_2(ty_1+4)}{y_1+y_2}=\frac{2ty_1y_2+4(y_1+y_2)}{y_1+y_2}=\frac{2ty_1y_2}{y_1+y_2}+4=-\frac{2t\times 36}{24t}+4=1$.

所以点 $E(1,0)$ 为定点，$|EM|=3$. …………（9分）

$S_{\triangle ABE}=|S_{\triangle AME}-S_{\triangle BME}|=\frac{1}{2}|EM|\cdot|y_1-y_2|=\frac{3}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{3}{2}\sqrt{\left(\frac{24t}{3t^2+4}\right)^2-\frac{4\times 36}{3t^2+4}}=\frac{18\sqrt{t^2-4}}{3t^2+4}$.

令 $\sqrt{t^2-4}=m(m>0)$，则 $S_{\triangle ABE}=\frac{18m}{3(m^2+4)+4}=\frac{18m}{3m^2+16}=\frac{18}{3m+\frac{16}{m}}\leqslant\frac{9}{\sqrt{3m\cdot\frac{16}{m}}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. …………（11分）

当且仅当 $m=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时取等号，所以 $\triangle ABE$ 的面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. …………（12分）

22.【解析】(1) $f'(x)=(x-a+1)e^x+1$，令 $m(x)=(x-a+1)e^x+1$，

则 $m'(x)=(x-a+2)e^x$，

当 $x<a-2$ 时，$m'(x)<0$；当 $x>a-2$ 时，$m'(x)>0$，

$\therefore m(x)$ 在 $(-\infty,a-2)$ 上单调递减，在 $(a-2,+\infty)$ 上单调递增. ……………………（2分）

①当 $a\leqslant 2$ 时，$m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$m(x)>m(0)=2-a\geqslant 0$，$f'(x)$ 无零点；……………………（3分）

②当 $a>2$ 时，$m(x)$ 在 $(0,a-2)$ 上单调递减，在 $(a-2,+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore m(x)_{\min}=m(a-2)=1-e^{a-2}<0$，而 $m(0)=2-a<0$，$m(a)=e^a+1>0$，

$\therefore \exists x_0\in(a-2,a)$，使得 $m(x_0)=0$，$\therefore m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且只有一个零点. ……………………（4分）

综上所述，当 $a\leqslant 2$ 时，$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无零点；

当 $a>2$ 时，$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且只有一个零点. ……………………（5分）

(2)①当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，显然 $F(x)\geqslant 0$；

②当 $a>0$ 时，若 $0<x<a$，$f(x)<0$；若 $x\geqslant a$，$f(x)\geqslant 0$.

$\therefore F(x)\geqslant 0$ 等价于 $g(x)\geqslant 0$ 在 $(0,a)$ 上恒成立. ……………………（6分）

$\because g(x)=ax\ln x+x+e^{-2}$，$\therefore g'(x)=a\ln x+a+1$.

令 $g'(x)>0$，则 $x>e^{-1-\frac{1}{a}}$；令 $g'(x)<0$，则 $0<x<e^{-1-\frac{1}{a}}$.

$\therefore g(x)$ 在 $(0,e^{-1-\frac{1}{a}})$ 上单调递减，在 $(e^{-1-\frac{1}{a}},+\infty)$ 上单调递增，……………………（8分）

不妨令 $t=-1-\dfrac{1}{a}$，则 $a=-\dfrac{1}{t+1}(t<-1)$，

则 $e^{-1-\frac{1}{a}}-a=e^t+\dfrac{1}{t+1}=\dfrac{(t+1)e^t+1}{t+1}$. ……………………（10分）

令 $p(t)=(t+1)e^t+1$，$p'(t)=(t+2)e^t$，

易得 $p(t)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，在 $(-2,-1)$ 上单调递增，

$\therefore p(t)\geqslant p(-2)=-e^{-2}+1>0$，

$\therefore e^{-1-\frac{1}{a}}<a$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,e^{-1-\frac{1}{a}})$ 上单调递减，在 $(e^{-1-\frac{1}{a}},a)$ 上单调递增，

$\therefore g(x)_{\min}=g(e^{-1-\frac{1}{a}})=-ae^{-1-\frac{1}{a}}+e^{-2}=\dfrac{e^t}{t+1}+e^{-2}$.

令 $q(t)=\dfrac{e^t}{t+1}+e^{-2}(t<-1)$，$\therefore q'(t)=\dfrac{te^t}{(t+1)^2}<0$，

$\therefore q(t)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，而 $q(-2)=0$，

$\because g(x)\geqslant 0$ 在 $(0,a)$ 上恒成立，$\therefore q(t)\geqslant 0$，

$\therefore t\leqslant -2$，即 $-1-\dfrac{1}{a}\leqslant -2$，$\therefore 0<a\leqslant 1$，

综上所述，a 的取值范围为 $a\leqslant 1$. ……………………（12分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：zizzsw。