

□ □ ■ □ □ ■ □ □

数学参考答案

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	C	A	B	A	D	B

【解析】

1. 因为 $A = \{x | -1 \leq x < 3\}$, $B = \mathbf{N}^*$, 故 $A \cap B = \{1, 2\}$, 故选 D.

2. $z = \frac{i^3}{2+i} = \frac{-i}{2+i} = \frac{-i(2-i)}{(2+i)(2-i)} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$, 所以 $\bar{z} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$, 虚部为 $\frac{2}{5}$, 故选 C.

3. 类比平面向量的运算, $\vec{a} + \vec{b} = (0, 2, 2, \dots, 2)$, 所以 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{0^2 + (n-1) \cdot 2^2} = 2\sqrt{n-1}$, A

错误; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 \times (n-1) = n-2$, B 错误; $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{n}$, $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{n-2}{n}$,

C 正确; 假设存在 $\lambda \in \mathbf{R}$ 使得 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, 则有 $1 = -\lambda$ 且 $1 = \lambda$, 此时 λ 无解, D 错误, 故选 C.

4. 由 $\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{3}$ 得 $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha = \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{3}$, 故 $\cos \left(2\alpha + \frac{\pi}{3} \right) =$

$1 - 2 \sin^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{7}{9}$, 又因为 $\cos \left(2\alpha + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left(2\alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{6} \right)$, 所以

$\sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{7}{9}$; 反之, 当 $\sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{7}{9}$ 时, 有 $1 - 2 \sin^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{7}{9}$, 此时

$\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = \pm \frac{1}{3}$, 则 $\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha = \pm \frac{2}{3}$, $\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{3}$ 不一定成立, 故

“ $\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{3}$ ”是“ $\sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{7}{9}$ ”的充分不必要条件, 故选 A.

5. 因为香菌、新笋、豆腐干一起下锅, 把它们捆绑在一起, 看作一个元素, 此时共有 5 个元素, 其中鸡汤最后下锅, 放在最后一个位置, 茄子净肉在鸡脯肉后下锅, 定序问题用倍缩

法, 共有 $\frac{A_4^4}{A_2^2} = 12$ 种不同的排列方式, 故选 B.

数学参考答案 · 第 1 页 (共 12 页)

□ □ ■ □ □ ■ □ □

6. 如图 1, 取线段 A_1B_1 的三等分点为 E_1 (靠近点 B_1), 连接 D_1E_1 , C_1E_1 , EE_1 , 则直三棱柱 $DCE-D_1C_1E_1$ 的外接球与三棱锥 D_1-DCE 外接球相同, 在 $\triangle DCE$ 中,

$$DE = \sqrt{DA^2 + AE^2} = \sqrt{7}, \quad CE = \sqrt{CB^2 + BE^2} = 2, \quad \text{由余弦定理得, } \cos \angle DEC = \frac{1}{2\sqrt{7}}, \quad \text{所以}$$

$$\sin \angle DEC = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}, \quad \text{则 } \triangle DCE \text{ 的外接圆直径为}$$

$$2r = \frac{DC}{\sin \angle DEC} = \frac{3}{\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}, \quad \text{则外接圆半径 } r = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}, \quad \therefore \text{三棱}$$

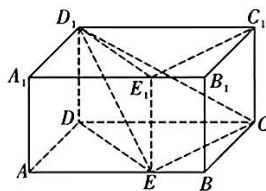


图 1

$$\text{柱外接球半径 } R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{DD_1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{3} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{37}{12}}, \quad S_{\text{表}} = 4\pi R^2 = \frac{37\pi}{3}, \quad \text{故选 A.}$$

$$7. \text{ 联立方程 } \begin{cases} F_1 = A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1, \\ F_2 = A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}A + \frac{3-\sqrt{5}}{2}B = 1, \end{cases} \quad \text{解得 } A = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$B = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \text{则 } F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right], \quad \text{由题可得, } F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad \text{且}$$

$$F_4^2 = \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^4 \right]^2 = 9, \quad \text{所以 } \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8 - 2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^4 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^8$$

$$= 45, \quad \text{则 } \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8 = 45 + 2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^8 = 47 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^8, \quad \text{因为 } \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^8 \in (0, 1), \quad \text{所以}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8 \in (46, 47), \quad \text{故 } \left\lceil \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8 \right\rceil = 46, \quad \text{故选 D.}$$

8. 因为 $y = \tan x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增, 所以 $\tan \frac{4}{5} > \tan \frac{\pi}{4} = 1 > \frac{19}{20}$, 所以 $c > b$. 设 $f(x) = e^x - ex$,

则 $f'(x) = e^x - e$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递

增, 故 $f(x)_{\min} = f(1) = 0$, $e^x \geq ex$, 当且仅当 “ $x = 1$ ” 时取等, 取 $x = \frac{19}{20}$,

$$e^{\frac{19}{20}} > e \cdot \frac{19}{20} > 2.7 \times \frac{19}{20} = 2.565 > 2.56 = \left(\frac{8}{5}\right)^2, \quad \text{所以 } \frac{19}{20} > 2 \ln \frac{8}{5}, \quad \text{即 } b > a, \quad \text{综上, } c > b > a,$$

故选 B.

□ □ ■ □ □ ■ □ □

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	AC	ABD	ACD	BD

【解析】

9. 因为 $f(x) = \sqrt{m^2+1} \sin(2x+\varphi)$ (其中 $\sin \varphi = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$, $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$)，则

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{m^2+1} \sin\left(-\frac{2\pi}{3}+\varphi\right) = -\sqrt{m^2+1}, \text{ 所以 } \sin\left(-\frac{2\pi}{3}+\varphi\right) = -1, \quad -\frac{2\pi}{3}+\varphi =$$

$$-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k \in \mathbb{Z}), \quad \varphi = \frac{\pi}{6}+2k\pi(k \in \mathbb{Z}), \text{ 则 } f(x) = \sqrt{m^2+1} \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right), \text{ 所以}$$

$$g(x) = \sqrt{m^2+1} \sin\left[2\left(x-\frac{7\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{6}\right] = \sqrt{m^2+1} \sin(2x-\pi) = -\sqrt{m^2+1} \sin 2x, \text{ 则 A 正确, B 错}$$

误; 因为 $g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{m^2+1}$, 所以 $g(x)$ 关于直线 $x = -\frac{\pi}{4}$ 对称, C 正确; $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时,

$2x \in (0, \pi)$, 而 $y = \sin x$ 在 $(0, \pi)$ 上不单调, 所以 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上不单调, D 错误, 故选

AC.

10. 因为 $a > 0$, $b > 0$, 且 $2a+b=1$, 所以由基本不等式可得 $\frac{2a+b}{2} \geq \sqrt{2ab}$, 则

$$ab \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}, \text{ 当且仅当 } 2a=b=\frac{1}{2} \text{ 时, “=” 成立, A 正确; 因为 } b=1-2a \in (0, 1),$$

所以 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 则 $a+b=1-a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, B 正确; 因为 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 所以

$$a^2+b^2 = a^2+(1-2a)^2 = 5a^2-4a+1 = 5\left(a-\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \geq \frac{1}{5}, \text{ 当且仅当 } a=\frac{2}{5} \text{ 时, “=” 成立,}$$

C 错误; 令 $x=a+1$, $y=b$, 则 $2x+y=3$, 则 $\frac{4}{a+1} + \frac{1}{b} = \frac{4}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{x} + \frac{1}{y}\right)(2x+y)$

$$= \frac{8 + \frac{2x}{y} + \frac{4y}{x} + 1}{3}, \text{ 由基本不等式可得, } \frac{8 + \frac{2x}{y} + \frac{4y}{x} + 1}{3} \geq \frac{9 + 4\sqrt{2}}{3} = 3 + \frac{4\sqrt{2}}{3}, \text{ 当且仅当}$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x \text{ 时, “=” 成立, 故 D 正确, 故选 ABD.}$$

数学参考答案·第 3 页 (共 12 页)

□ □ ■ □ □ ■ □ □

11. 在图乙中, 因为点 A 在平面 $DCBE$ 上的射影 F 在棱 DC 上, 所以 $AF \perp$ 平面 $DCBE$, 又 $BC \subset$ 平面 $DCBE$, 所以 $AF \perp BC$, 又 $BC \perp DC$, $AF \cap DC = F$, 所以 $BC \perp$ 平面 ADC , 又 $AD \subset$ 平面 ADC , 所以 $BC \perp AD$, A 正确; 如图 2, 在图乙中作 $EP \perp DC$ 于 P , 连接 AP , 则 AE 与 BC 所成角即为 AE 与 EP 所成角, 又由 $BC \perp$ 平面 ADC 可得 $EP \perp AP$, 而 $EP = 1$, $AE = 2 - BE = \frac{3}{2}$, 则 $\cos \angle AEP = \frac{2}{3}$, 即 AE 与 BC 所成角余弦值为 $\frac{2}{3}$, 故 B 错误; 如图 2, 在图乙中作 $FG \perp DE$ 于 G , 连接 AG , 则由 $AF \perp$ 平面 $DCBE$ 可得 $AF \perp DE$, 又 $FG \cap AF = F$, 所以 $DE \perp$ 平面 AGF , 则 $DE \perp AG$, 在图甲中, 如图 3, 作 $AG \perp DE$, 则 A, G, F 三点共线, 设 $AE = x$, $DF = y$, 则由 $\triangle DFA \sim \triangle ADE$ 可得 $\frac{DF}{AD} = \frac{AD}{EA}$, 即 $\frac{y}{1} = \frac{1}{x}$, 又在图乙中有 $AF = \sqrt{AD^2 - DF^2} = \sqrt{1 - y^2} > 0$, 所以 $y \in (0, 1)$, 所以 $x = \frac{1}{y} > 1$, 而 $x = AE \in (0, 2)$, 所以 $x \in (1, 2)$, $y = \frac{1}{x} \in (\frac{1}{2}, 1)$, 故 D 正确; 当 $EB = \frac{1}{2}$ 时, $x = \frac{3}{2}$, 则 $y = \frac{2}{3}$, 所以 $AF = \sqrt{AD^2 - DF^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 则 $V_{A-DCBE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(EB + DC) \cdot BC}{2} \cdot AF$
- $$= \frac{\frac{1}{2} + 2}{6} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{5\sqrt{5}}{36},$$
- 故 C 正确, 故选 ACD.

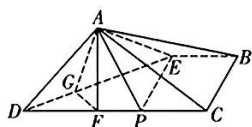


图 2

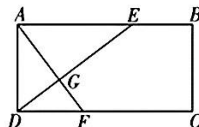


图 3

12. 设 $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$, 则由 B, C 在抛物线上可得 $y_1^2 = 4x_1$, $y_2^2 = 4x_2$, 所以
- $$k_{BC} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{4}} = \frac{4}{y_1 + y_2},$$
- 当 BC 中点纵坐标为 2 时, $y_1 + y_2 = 4$, 所以 $k_{BC} = 1$, A 错误; 若点 F 恰为 $\triangle OBC$ 的垂心, 则由 $OF \perp BC$, 可得 B, C 关于 x 轴对称, 所以
- $$y_2 = -y_1, \text{ 则 } k_{BF} = \frac{y_1}{\frac{y_1^2}{4} - 1}, \quad k_{OC} = \frac{-y_1}{\frac{y_1^2}{4}} = \frac{-4}{y_1},$$
- 又由 $BF \perp OC$ 可得 $k_{BF} \cdot k_{OC} = -\frac{4}{\frac{y_1^2}{4} - 1} = -1$,

□ □ ■ □ □ ■ □ □

所以 $y_1^2 = 20$, 则 $B(5, 2\sqrt{5})$, $C(5, -2\sqrt{5})$, 所以 $|OB| = |OC| = 3\sqrt{5}$, $|BC| = 4\sqrt{5}$, 则 $\triangle OBC$ 的周长为 $10\sqrt{5}$, B 正确; 若 AC 与 AB 倾斜角互补, 则 $k_{AC} + k_{AB} = 0$, 即 $\frac{4}{2+y_1} + \frac{4}{2+y_2} = \frac{16+4(y_1+y_2)}{4+2(y_1+y_2)+y_1y_2} = 0$, 所以 $y_1 + y_2 = -4$, 则 $k_{BC} = \frac{4}{y_1+y_2} = -1$, 故 C 错误; 若 $AC \perp BC$, 由 $AC \perp BC$ 可得 $k_{AC} \cdot k_{BC} = -1$, 即 $\frac{4}{2+y_2} \cdot \frac{4}{y_1+y_2} = -1$, 即 $y_2^2 + (2+y_1)y_2 + 2y_1 + 16 = 0$ (y_1, y_2 与 2 互不相等), 将 $y_2^2 + (2+y_1)y_2 + 2y_1 + 16 = 0$ 看作关于 y_2 的一元二次方程, 令 $\Delta \geq 0$, 解得 $y_1 \in (-\infty, -6] \cup [10, +\infty)$, 又当 $y_2 = 2$ 时, $y_1 = -6$, 当 $y_1 = y_2$ 时, 方程无解, 所以 B 点纵坐标 $y_1 \in (-\infty, -6] \cup [10, +\infty)$, 故 D 正确, 故选 BD.

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

题号	13	14	15	16
答案	1	$k = \pm(e+1)$	$x^2 + y^2 = 1$; 6	$\frac{1}{3}$

【解析】

13. 由题意知, $P(X < 3) - \frac{1}{2} = P(a < X \leq 2)$, 又 $P(X < 2) = \frac{1}{2}$, 所以 $P(X < 3) - P(X < 2) =$

$P(a < X \leq 2)$, 可得 $P(2 \leq X < 3) = P(a < X \leq 2)$, 所以 $a = 1$.

14. 当 $x \geq 0$ 时, $y = e^x + x$, $y' = e^x + 1$, 设直线 $y = kx$ 与曲线 $y = e^x + x$ 相切于点 (x_0, kx_0) , 则

$$\begin{cases} e^{x_0} + x_0 = kx_0 \\ e^{x_0} + 1 = k \end{cases} \text{ 得 } e^{x_0} + x_0 = (e^{x_0} + 1)x_0, \text{ 化简得 } e^{x_0} = x_0 e^{x_0}, \text{ 解得 } x_0 = 1, k = e + 1. \text{ 又}$$

$y = e^{|x|} + |x|$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 所以 $k = \pm(e+1)$.

15. 圆 O 圆心为 $(0, 0)$, 半径 2, M 是 AB 的中点, $|AB| = 2\sqrt{3}$, 所以 $OM \perp AB$, $|OM| = 1$,

点 M 的轨迹方程是 $x^2 + y^2 = 1$. $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}) \cdot$

$(\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{MA}) = \overrightarrow{PM}^2 - 3$, 点 P 为直线 $x + y - 4\sqrt{2} = 0$ 上一动点, 点 M 是 $x^2 + y^2 = 1$ 上一点,

圆心 $(0, 0)$ 到 $x + y - 4\sqrt{2} = 0$ 的距离是 4, 所以 $|PM|$ 的最小值是 3, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值为 6.

□ □ ■ □ □ ■ □ □

16. 由题意知, $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $F(c, 0)$, 当 $PF \perp AB$ 时, $PF = \frac{b^2}{a}$. 由 $\frac{PF}{AF} = \frac{MB}{AB}$, 得

$$\frac{\frac{b^2}{a}}{c+a} = \frac{MB}{2a}, \quad MB = \frac{2b^2}{c+a}. \quad \text{又 } \angle PFB \text{ 的角平分线与直线 } x=a \text{ 交于点 } N, \text{ 可知}$$

$$NB = BF = a - c, \text{ 所以 } \frac{MB}{NB} = \frac{2b^2}{(c+a)(a-c)} = \frac{2b^2}{b^2} = 2. \quad \frac{S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle NFB}} = \frac{\frac{1}{2} \times AB \times MB}{\frac{1}{2} \times BF \times NB} = \frac{2a}{a-c} \times 2 = 6,$$

解得 $a = 3c$, 椭圆 C 的离心率是 $\frac{1}{3}$.

四、解答题 (共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

解: (1) 当 $n \geq 2$ 时, 由 $(n-1)S_n = 2nS_{n-1}$ 得 $\frac{S_n}{n} = 2 \cdot \frac{S_{n-1}}{n-1}$,

又因为 $\frac{S_1}{1} = a_1 = 1$, 所以 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, (2 分)

$$\text{故 } \frac{S_n}{n} = 2^{n-1}, \quad S_n = n \cdot 2^{n-1},$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_{n-1} = (n-1) \cdot 2^{n-2},$$

$$\text{所以 } a_n = S_n - S_{n-1} = n \cdot 2^{n-1} - (n-1) \cdot 2^{n-2} = (n+1) \cdot 2^{n-2} \quad (n \geq 2), \quad a_1 = 1 \text{ 也符合上式,}$$

$$\text{所以 } a_n = (n+1) \cdot 2^{n-2}, \text{ (6 分)}$$

$$(2) \quad b_n = \frac{4^n}{a_n a_{n+1}} = \frac{4^n}{(n+1) \cdot 2^{n-2} \cdot (n+2) \cdot 2^{n-1}} = \frac{8}{(n+1) \cdot (n+2)} = 8 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right),$$

$$\text{所以 } T_n = 8 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = 8 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = 4 - \frac{8}{n+2}.$$

..... (10 分)

18. (本小题满分 12 分)

(1) 证明: 在矩形 ADD_1A_1 中, $AD = 2$, E 为 A_1D_1 的中点,

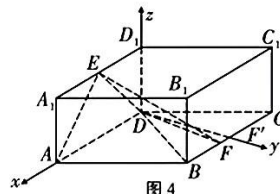
$$\therefore AA_1 = A_1E = 1, \quad AE = \sqrt{2}, \quad \text{同理可得 } DE = \sqrt{2},$$

$$\text{在 } \triangle ADE \text{ 中, } AE^2 + DE^2 = AD^2, \therefore \angle AED = 90^\circ, \quad AE \perp DE,$$

..... (2 分)

□ □ ■ □ □ ■ □ □

如图 4，连接 BD ，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle BCD = 60^\circ$ ，且
 $BC = CD$ ，
 $\therefore \triangle BCD$ 为等边三角形，又 $\because F$ 为 BC 中点， $\therefore DF \perp BC$ ，
 $\because BC \parallel AD$ ， $\therefore DF \perp AD$ ，
 又 $\because$ 平面 $ABCD \perp$ 平面 ADD_1A_1 ， $DF \subset$ 平面 $ABCD$ ，平面 $ABCD \cap$ 平面 $ADD_1A_1 = AD$ ，
 $\therefore DF \perp$ 平面 ADD_1A_1 ，



又 $\because AE \subset$ 平面 ADD_1A_1 ， $\therefore AE \perp DF$ ，..... (5 分)
 又 $\because DE \cap DF = D$ ， $\therefore AE \perp$ 平面 DEF ，..... (6 分)

(2) 解：存在，当 F 为线段 BC 的四等分点（靠近点 B ）时，二面角 $A-DE-F$ 的余弦值为 $\frac{1}{5}$ ，理由如下：

取 BC 中点 F' ，连接 DF' ，以 D 为原点，建立空间直角坐标系如图，

则 $A(2, 0, 0)$ ， $E(1, 0, 1)$ ， $B(1, \sqrt{3}, 0)$ ， $C(-1, \sqrt{3}, 0)$ ，

$\overrightarrow{DE} = (1, 0, 1)$ ， $\overrightarrow{BC} = (-2, 0, 0)$ ，

设 $F(a, \sqrt{3}, 0)$ ，则 $\overrightarrow{DF} = (a, \sqrt{3}, 0)$ ，..... (8 分)

平面 ADE 的一个法向量为 $\vec{m} = (0, 1, 0)$ ，设平面 DEF 的一个法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

则 $\begin{cases} x + z = 0, \\ ax + \sqrt{3}y = 0, \end{cases}$ 解得 $\vec{n} = (\sqrt{3}, -a, -\sqrt{3})$ ，

二面角 $A-DE-F$ 的余弦值为 $\cos \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|-a|}{1 \cdot \sqrt{3 + a^2 + 3}} = \frac{1}{5}$ ，

解得 $a = \pm \frac{1}{2}$ ，

但当 $a = -\frac{1}{2}$ 时，二面角 $A-DE-F$ 的平面角为钝角，舍去，故 $a = \frac{1}{2}$ 。

此时， F 为线段 BC 的四等分点（靠近点 B ）。..... (12 分)

19. (本小题满分 12 分)

解：(1) 掷 2 次骰子，掷出 1 次偶数的概率为 $C_2^1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 。..... (1 分)

□ □ ■ □ □ ■ □ □

掷 4 次骰子，掷出 2 次偶数的概率为 $C_4^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$ ，

..... (2 分)

所以 $n=1$ 更有利于顾客获得红包。..... (3 分)

(2) (i) 当 $n=2$ 时，记顾客获得的消费券为 X 元，

X 可取 10, 50, 100.

当掷出 2 次偶数时，2 次奇数时， $X=50$ ，

所以 $P(X=50) = C_4^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$ ；..... (5 分)

当掷出 4 次偶数，或者 3 次偶数 1 次奇数时， $X=100$ ，

所以 $P(X=100) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_4^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$ ；..... (7 分)

当掷出 4 次奇数，或者 3 次奇数 1 次偶数时， $X=10$ ，

所以 $P(X=10) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_4^1 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$ 。..... (9 分)

所以随机变量 X 的数学期望是 $50 \times \frac{3}{8} + 100 \times \frac{5}{16} + 10 \times \frac{5}{16} = \frac{425}{8}$ 。

..... (10 分)

(ii) 掷出偶数的次数等于奇数的概率为 $C_{2n}^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$ 。

又掷到奇数和偶数的概率各为 $\frac{1}{2}$ ，

所以掷出偶数的次数多于奇数的概率等于掷出偶数的次数少于奇数的概率，

所以 $P_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{C_{2n}^n}{2^{2n+1}}$ 。..... (12 分)

20. (本小题满分 12 分)

解：(1) 由三角形面积公式可得 $\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ah$ ，

则 $bc = \frac{ah}{\sin A} = \frac{2a^2}{3 \sin A}$ ，..... (2 分)

□ □ ■ □ □ ■ □ □

$$\text{又 } b+c=a+h=\frac{5}{3}a,$$

$$\text{由余弦定理可得 } \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2-2bc}{2bc} = \frac{\left(\frac{5}{3}a\right)^2-a^2}{\frac{4a^2}{3\sin A}} - 1 = \frac{4}{3}\sin A - 1,$$

$$\therefore \frac{4}{3}\sin A - \cos A = 1, \quad k = \frac{4}{3}. \quad \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

(2) 由 $b+c=a+h$, 可得

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2-2bc}{2bc} = \frac{(a+h)^2-a^2}{\frac{2ah}{\sin A}} - 1 = \left(1 + \frac{h}{2a}\right)\sin A - 1,$$

$\dots\dots\dots (6 \text{ 分})$

$$\therefore 1 + \frac{h}{2a} = \frac{\cos A + 1}{\sin A} = \frac{2\cos^2 \frac{A}{2} - 1 + 1}{2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{1}{\tan \frac{A}{2}}, \quad \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

如图 5, 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于 D, 过点 C 作 $CE \perp BC$, 使得 $CE = 2h$, 连接 BE, AE,

则 $AC = AE$,

在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中, $BE = \sqrt{a^2 + 4h^2}$,

则 $a+h=b+c=AC+AB=AE+AB \geq BE$,

即 $a+h \geq \sqrt{a^2 + 4h^2}$,

解得 $0 < \frac{h}{a} \leq \frac{2}{3}$, $\dots\dots\dots (9 \text{ 分})$

$$\text{则 } 1 + \frac{h}{2a} = \frac{1}{\tan \frac{A}{2}} \in \left(1, \frac{4}{3}\right],$$

$$\therefore \tan \frac{A}{2} \in \left[\frac{3}{4}, 1\right), \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

$$\text{而 } \tan A = \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{\tan \frac{A}{2}} - \tan \frac{A}{2}},$$

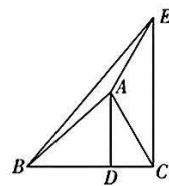


图 5

□ □ ■ □ □ ■ □ □

令 $t = \tan \frac{A}{2}$, 则 $y = \frac{1}{t} - t$ 在 $t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right)$ 时为减函数,

$$\therefore y \in \left(0, \frac{7}{12}\right],$$

$\therefore$ 当 $t = \frac{3}{4}$ 时, $y_{\max} = \frac{7}{12}$, 此时 $\tan A$ 取得最小值 $\frac{24}{7}$ (12 分)

21. (本小题满分 12 分)

解: (1) 设直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 与 x 轴交于点 D , 不妨取一条渐近线 $l_1: y = \frac{b}{a}x$,

$$\text{则 } \tan \angle AOD = \frac{b}{a},$$

$$\therefore |AB| = 2|OD| \tan \angle AOD = \frac{2ab}{c}, \text{ (2 分)}$$

$$\text{又 } F \text{ 到 } l_1: bx - ay = 0 \text{ 的距离 } d = \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b, \text{ (3 分)}$$

$$\therefore |AB| = \frac{2ab}{c} = \sqrt{3}b, \text{ 即 } c = \frac{2\sqrt{3}}{3}a,$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \text{ (4 分)}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } c = \frac{2\sqrt{3}}{3}a,$$

$$\therefore c^2 = \frac{4}{3}a^2 = a^2 + b^2,$$

$$\therefore a^2 = 3b^2,$$

$$\therefore \text{双曲线 } C: \frac{x^2}{3b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ 即 } x^2 - 3y^2 - 3b^2 = 0, \text{ 则 } F(2b, 0), \text{ 直线 } l: x = y + 2b,$$

..... (5 分)

$$\text{由 } \begin{cases} x = y + 2b, \\ x^2 - 3y^2 - 3b^2 = 0, \end{cases} \text{ 消去 } x \text{ 可得 } -2y^2 + 4by + b^2 = 0,$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{ 则由韦达定理可得 } y_1 + y_2 = 2b, \quad y_1 y_2 = \frac{b^2}{-2},$$

..... (7 分)

□ □ ■ □ □ ■ □ □

设 $P(x, y)$, 则由 $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OM} + \mu \overrightarrow{ON}$ 可得 $\begin{cases} x = \lambda x_1 + \mu x_2, \\ y = \lambda y_1 + \mu y_2, \end{cases}$

由点 $P(x, y)$ 在双曲线上可得 $(\lambda x_1 + \mu x_2)^2 - 3(\lambda y_1 + \mu y_2)^2 - 3b^2 = 0$,

即 $\lambda^2(x_1^2 - 3y_1^2) + 2\lambda\mu(x_1x_2 - 3y_1y_2) + \mu^2(x_2^2 - 3y_2^2) - 3b^2 = 0$,

..... (9 分)

$\because x_1x_2 - 3y_1y_2 = (y_1 + 2b)(y_2 + 2b) - 3y_1y_2 = -2y_1y_2 + 2b(y_1 + y_2) + 4b^2 = 9b^2$,

$x_i^2 - 3y_i^2 = 3b^2 (i=1, 2)$, (11 分)

$\therefore \lambda^2 + 6\lambda\mu + \mu^2 = 1$ (12 分)

22. (本小题满分 12 分)

解: (1) $f(x) = e^{-x}(x^2 + m)$, $f'(x) = e^{-x}(-x^2 + 2x - m)$,

令 $\Delta = 4 - 4m$,

当 $\Delta \leq 0$, 即 $m \geq 1$ 时, $f'(x) \leq 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;

..... (2 分)

当 $\Delta > 0$, 即 $m < 1$ 时, 公众号: 网课来了

当 $x < 1 - \sqrt{1-m}$ 或者 $x > 1 + \sqrt{1-m}$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $1 - \sqrt{1-m} < x < 1 + \sqrt{1-m}$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1 - \sqrt{1-m})$ 和 $(1 + \sqrt{1-m}, +\infty)$ 上单调递减, 在 $[1 - \sqrt{1-m}, 1 + \sqrt{1-m}]$ 上单调递增.

综上, 当 $m \geq 1$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;

当 $m < 1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1 - \sqrt{1-m})$ 和 $(1 + \sqrt{1-m}, +\infty)$ 上单调递减,

在 $[1 - \sqrt{1-m}, 1 + \sqrt{1-m}]$ 上单调递增. (4 分)

(2) 当 m 为正整数时, 由 (1) 知, $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递减,

又 $y = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递减. (5 分)

当 $m=1$ 时, $f(0)=1=\cos 0$, 不满足题意;

当 $m \geq 2$ 时, $f(x) = \frac{x^2 + m}{e^x} \geq \frac{x^2 + 2}{e^x}$,

当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) \geq f(1) = \frac{3}{e} > 1 \geq \cos x$,

数学参考答案 · 第 11 页 (共 12 页)

□ □ ■ □ □ ■ □ □

当 $x \in (1, 2]$ 时, $f(x) \geq f(2) = \frac{6}{e^2} > \frac{\sqrt{2}}{2} > \cos 1$,

当 $x \in (2, \pi]$ 时, $f(x) > 0 > \cos x$.

所以当 $m \geq 2$ 时, 关于 x 的方程 $f(x) = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上无解;

..... (7 分)

不妨设 $x_1 \leq x_2$, 令 $t_1 = \ln x_1$, $t_2 = \ln x_2$, 则 $\ln \sqrt{x_1 x_2} = \frac{1}{2}(\ln x_1 + \ln x_2) = \frac{t_1 + t_2}{2}$.

所以对任意 $t_1, t_2 \in (-\infty, +\infty)$, $t_1 \leq t_2$, $f(\ln \sqrt{x_1 x_2}) = f\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)$,

$f(\ln x_1) + f(\ln x_2) = f(t_1) + f(t_2)$ (9 分)

设 $h(x) = f\left(\frac{t+t_1}{2}\right) - \frac{f(t) + f(t_1)}{2}$, $t \geq t_1$,

则 $h'(t) = \frac{1}{2}\left[f'\left(\frac{t+t_1}{2}\right) - f'(t)\right]$,

又 $f'(t) = e^{-t}(-t^2 + 2t - m)$,

设 $\varphi(t) = f'(t) = e^{-t}(-t^2 + 2t - m)$,

所以 $\varphi'(t) = e^{-t}(t^2 - 4t + 2 + m)$,

当 $m \geq 2$ 时, $t^2 - 4t + 2 + m \geq 0$, $\varphi'(t) > 0$, $\varphi(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, $f'(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

又 $t \geq t_1$, 所以 $t \geq \frac{t+t_1}{2}$, 所以 $f'(t) \geq f'\left(\frac{t+t_1}{2}\right)$,

所以 $h'(t) = \frac{1}{2}\left[f'\left(\frac{t+t_1}{2}\right) - f'(t)\right] \leq 0$, $h(t)$ 单调递减, 则 $h(t) \leq h(t_1) = 0$ 恒成立,

所以 $h(t_2) \leq 0$, 即 $f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \leq \frac{f(t_1) + f(t_2)}{2}$,

对任意 $t_1, t_2 \in (-\infty, +\infty)$, $f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \leq \frac{f(t_1) + f(t_2)}{2}$,

所以当 $m \geq 2$ 时, 对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$,

都有 $2f(\ln \sqrt{x_1 x_2}) \leq f(\ln x_1) + f(\ln x_2)$ (11 分)

所以存在正整数 m 满足条件, 且 m 的最小值是 2. (12 分)

数学参考答案 • 第 12 页 (共 12 页)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线