海淀区高三年级第二学期期末数学答案

2020.6

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	A	B	D	C	C	A	B	C	C

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

题号	11	12	13	14	15
答案	$-\frac{1}{2}$	满足$x^2-y^2=\lambda$（$\lambda>2$或$\lambda<-2$）即可	6	1；$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$	②③

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16 解：

选① $a_1=4$

$\because \{a_n\}$是等差数列

$\therefore S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

$\because a_1=4, S_5=40$

$\therefore S_5=20+10d=40$

$\therefore d=2$

$\because S_k=k^2+3k, S_1=a_1=4$

$\because S_k=S_1$

$\therefore k^2+3k=4$

$(k-1)(k+4)=0$

$\therefore k=1$或$k=-4$(舍去)

$\therefore$不存在$k>1$,使得$S_k=S_1$

选②d=-2

$\because \{a_n\}$是等差数列

$\therefore S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

$\because d=-2, S_5=40$

$\therefore S_5=5a_1-20=40$

$\therefore a_1 = 12$

$\therefore S_k = -k^2 + 13k, S_1 = a_1 = 12$

$\because S_k = S_1$

$\therefore -k^2 + 13k = 12$

$(k-12)(k-1) = 0$

$\therefore k = 1$或$k = 12$

$\because k = 12 > 1$

$\therefore$,存在$k > 1$,使得$S_k = S_1$

17. 解:

(1)证明:因为 E 为 AD 中点,且 $BC = \frac{1}{2}AD$

所以 $DE = BC$

又因为 $AD // BC$

所以 $DE \underline{//} BC$

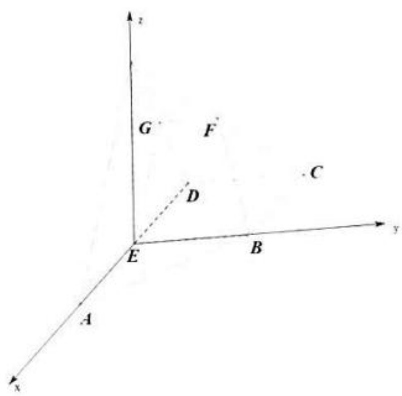
所以 四边形 $BCDE$ 为平行四边形

所以 $BE // CD$

$BE \subset$平面$BEGF$

平面$BEGF \cap$平面$PDC = FG$

所以 $BE // FG$



(2) 由(1)可得 $BE // CD$

因为$\angle ADC = 90^\circ$

所以$\angle AEB = 90^\circ$

且$PE \perp$平面$ABCD$

所以 以 E 为原点,EA 为 x 轴,EB 为 y 轴,EP 为 z 轴建立空间直角坐标系;

设 $P(0,0,p)$

$A(1,0,0), B(0,1,0)\ C(-1,1,0)$

$\overrightarrow{PC} = (-1,1,-p)$,$\overrightarrow{AB} = (-1,1,0)$

因为PC与AB所成角为$\frac{\pi}{4}$

所以$\left|\cos\left\langle \overrightarrow{PC},\overrightarrow{AB}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{PC}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2},(p>0)$

解得 $p=\sqrt{2}$

$P\left(0,0,\sqrt{2}\right),F\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),E(0,0,0)$

$\overrightarrow{PB}=\left(0,1,-\sqrt{2}\right),\overrightarrow{EB}=(0,1,0),\overrightarrow{EF}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

设平面 BEF 得一个发向量为$\vec{n}=(x,y,z)$

$\begin{cases}\overrightarrow{EB}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{EF}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$,可得$\begin{cases}y=0\\ -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}z=0\end{cases}$，解得$\vec{n}=\left(\sqrt{2},0,1\right)$

$\overrightarrow{PB}\cdot\vec{n}=-\sqrt{2}$,

设直线 PB 与平面 BEF 所成的角为α

$\sin\alpha=\left|\cos<\overrightarrow{PB},\vec{n}>\right|=\dfrac{|\overrightarrow{PB}\cdot\vec{n}|}{\left|\overrightarrow{PB}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

18.解：

(1)由题知该地区居民约为 2000 万，由图 1 知该地区年龄在 71-80 岁的居民人数为 $0.004\times10\times2000$=80万.

由图 2 知年龄在 71-80 岁的居民签约率为0.7，所以该地区年龄在 71-80 岁且已签约家庭医生的居民人数为：$80\times0.7=56$ 万.

(2)由题知此地区年龄段在 71-80 的每个居民签约家庭医生的概率为$P=0.7$，且每个居民之间是否签约都是独立的，所以设“从该地区年龄在 71-80 岁居民中随机抽取两人”为事件 B，随机变量为x,这两人中恰有 1 人已签约家庭医生的概率为：$p(x=1)=C_2^1 0.7^1\times0.3^1=0.42$

（3）由图 1，2 知：

年龄段	该地区人数（万）	签约率%
18-30	$0.005\times10\times2000$=100 $0.018\times10\times2000$=360 大于 360，小于 460	30.3
31-40，41-50	$(0.021+0.016)\times10\times2000$=740	37.1
51-60	$0.015\times10\times2000$=300	55.7
61-70	$0.010\times10\times2000$=200	61.7

71-80	$0.004\times10\times2000=80$	70
80 以上	$(0.0025+0.0005)\times10\times2000=60$	75.8

由以上数据可知这个地区在 31-50 这个年龄段的人为 740 万，基数较其他年龄段是最大的，且签约率为 37.1%，非常低，所以为把该地区满 18 周岁居民的签约率提高到 55%以上，应着重提高 31-50 这个年龄段的签约率.

19. 解：

（Ⅰ）由题意可知

$$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ b=1\\ b^2+c^2=a^2\end{cases}，解得\begin{cases}a=2\\ b=1\\ c=\sqrt{3}\end{cases}$$

所以椭圆 W 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$。

（Ⅱ）解法一：

设点 $C(x_0,y_0)$，

在直线 $l_{AC}:\dfrac{y-1}{y_0-1}=\dfrac{x}{x_0}$ 中，令 $y=2$ 得 $x=\dfrac{x_0}{y_0-1}$，即 $M(\dfrac{x_0}{y_0-1},2)$

由上知 $k_1=\dfrac{y_0+1}{x_0}$，$k_2=\dfrac{3}{\dfrac{x_0}{y_0-1}}=\dfrac{3(y_0-1)}{x_0}$

所以 $k_1k_2=\dfrac{y_0+1}{x_0}\times\dfrac{3(y_0-1)}{x_0}=\dfrac{3(y_0{}^2-1)}{x_0{}^2}=\dfrac{3\times(-\dfrac{x_0{}^2}{4})}{x_0{}^2}=-\dfrac{3}{4}$

解法二：由题意可知，直线 l 斜率存在且不为 0，设直线 l：$y=kx+1$,

由 $\begin{cases}y=kx+1\\ x^2+4y^2=4\end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+8kx=0$

所以 $x_C=\dfrac{-8k}{4k^2+1}$，

在直线 l：$y=kx+1$ 中，令 $y=2$，得 $x_M=\dfrac{1}{k}$，即 $M(\dfrac{1}{k},2)$

所以$k_1=\frac{y_C+1}{x_C}=\frac{kx_C+2}{x_C}=k+\frac{2}{x_C}=k-\frac{4k^2+1}{4k}=-\frac{1}{4k}$

$k_2=\frac{3}{\frac{1}{k}}=3k$

所以$k_1k_2=-\frac{1}{4k}\times 3k=-\frac{3}{4}$

20.解：

（Ⅰ）$x\in R, f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$，

令 $f'(x)=2e^x\cos x>0$ 得：$x\in\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right),k\in Z$，

$\therefore f(x)$单调递增区间为$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right),k\in Z$

（Ⅱ）原命题等价于：在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上，方程$e^x\cos x=1$有唯一解

设$g(x)=e^x\cos x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

则$g'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x=-\sqrt{2}e^x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，

此时，$x,g'(x),g(x)$变化情况如下：

x	$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗	极大值	↘

此时，$g(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上单调递增，且$g(0)=1, g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}>1$，

$g(x)$在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，且$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，

$\therefore g(x)=e^x\cos x=1$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上存在唯一一个根，

即$f'(x)=2e^x\cos x-2=0$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上存在唯一一个零点，

$\therefore$曲线$y=f(x)$在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上有且仅有一条斜率为2的切线。

21. 解：

若点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$相关，不妨设$x_1,y_1,x_2,y_2\geq 0$,

则$x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2\geq(x_1+y_2)^2+(x_2+y_1)^2 \Leftrightarrow (x_1-x_2)(y_1-y_2)\geq 0$.

(1) ①$(2-3)(1-2)\geq 0$, 因此相关; ②$(4-2)(3-4)<0$, 因此不相关.

(2) ①在第一象限内, $(x-1)(y-1)\geq 0$, 可知$1\leq x\leq n$且$1\leq y\leq n$, 有n^2个点;
在x轴正半轴上, 点$(1,0)$满足条件; 在y轴正半轴上, 点$(0,1)$满足条件;
原点$(0,0)$满足条件; 因此集合Ω_n中共有$4n^2+5$个点与点$A(1,1)$相关.

②若两个不同的点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$相关, 其中$x_1,x_2\geq 0,y_1,y_2\geq 0$,

可知$(x_1-x_2)(y_1-y_2)\geq 0$. 下证$|(x_1+y_1)-(x_2+y_2)|\geq 1$.

若$x_1=x_2$, 则$y_1\neq y_2$, 成立; 若$x_1>x_2$, 则$y_1\geq y_2$, 若$x_1<x_2$, 则$y_1\leq y_2$, 亦成立.

由于$|(x_1+y_1)-(x_2+y_2)|\leq(n+n)-(0+0)=2n$,

因此最多有$2n+1$个点两两相关, 其中最多有$2n-1$个点在第一象限; 最少有 1 个点在坐标轴正半轴上, 一个点为原点.

因此S中元素个数的最大值为$4(2n-1)+2\cdot 1+1=8n-1$.

关于我们

自主招生在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“**答题模板**”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“**必背知识点**”,即可获取《高考考前必背知识点》