兰州一中 2022-2023-2 学期高二年级期末考试

数学试题参考答案

一、单选题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.有且仅有一个选项符合题意；

二、多选题：9--12 题每题至少两个选项符合题意，多选不得分，少选得 2 分.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	C	B	A	B	D	C	B	ABD	BD	ABD	BC

第Ⅱ卷（非选择题 共 90 分）

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 2　　14. $e-1$　　15. $5\sqrt{5}$　　16. $[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1)$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(本小题满分 10 分)

【解】(1) 设 A_1 表示“甲球员担当边锋”，

A_2 表示“甲球员担当前卫”，

A_3 表示“甲球员担当中场”，

A_1，A_2，A_3 两两互斥，

设 B 表示“球队赢了某场比赛”，

则 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$

$=0.5\times0.6+0.3\times0.8+0.2\times0.7=0.68$，

该球队某场比赛获胜的概率为 0.68.　　--------5 分

(2) 由 (1) 知：$P(B)=0.68$，

则 $P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{0.3\times0.8}{0.68}=\frac{6}{17}$，

所以球员甲担当前卫的概率为 $\frac{6}{17}$.　　------------10 分

18.(本小题满分 12 分)

【解】(1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x+x-\mathrm{e}$，

$f'(x)=\mathrm{e}^x+1$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线斜率为 $f'(0)=2$，

又 $f(0)=1-\mathrm{e}$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-f(0)=f'(0)(x-0)$，即 $y-(1-\mathrm{e})=2(x-0)$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=2x+1-\mathrm{e}$．　　　　----------6 分

（2）若 $f(x)$ 只有一个极值点，则 $f'(x)=0$ 只有一个根，

所以方程 $\mathrm{e}^x+a=0$ 只有一个根，即 $\mathrm{e}^x=-a$ 只有一个解，

即 $y=-a$ 与 $y=\mathrm{e}^x$ 只有一个交点，

因为 $y=\mathrm{e}^x>0$，

所以 $-a>0$，

所以 $a<0$，

所以 $x=\ln(-a)$，当 $x<\ln(-a)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>\ln(-a)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 只有一个极小值点 $x=\ln(-a)$，

故 a 的取值范围为 $(-\infty,0)$．　　　　------------12 分

19.（本小题满分 12 分）

【解】（1）证明：连接 AC 交 BD 于点 O，连接 FO，

由 $ABCD$ 是正方形可得，O 是 AC 的中点，又由 F 为 AE 的中点，

在 $\triangle ACE$ 中，FO 为中位线，所以 $FO//CE$，

因为 $CE\not\subset$ 平面 DFB，且 $FO\subset$ 平面 DFB，所以 $CE//$ 平面 DFB．　　　　----------6 分

（2）解：连接 GO，由 $BD\perp$ 面 AGC，因为 $GO\subset$ 面 AGC，所以 $BD\perp GO$，

又由 $ED\perp$ 平面 $ABCD$，且 $BD\subset$ 面 $ABCD$，所以 $BD\perp ED$，所以 $DE//GO$，

所以点 G 为 BE 的中点，以点 D 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，

设 $DE=DA=DC=2$，

则 $C(0,2,0)$，$D(0,0,0)$，$G(1,1,1)$，所以 $\overrightarrow{DG}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$，

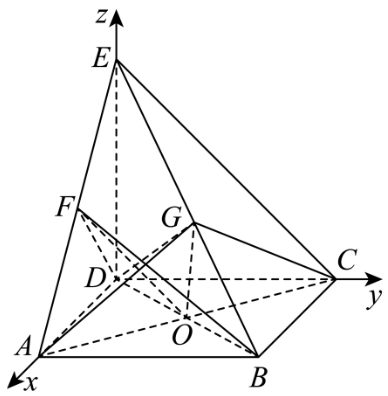
设平面 GDC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DG}=x+y+z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DG}=2y=0\end{cases}$，

令 $x=-1$，则 $y=0$，$z=1$，所以平面 GDC 的一个法向量为 $\vec{n}=(-1,0,1)$，

又平面 BDC 的一个法向量为 $\overrightarrow{m}=(0,0,1)$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}=\dfrac{1}{1\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以二面角 $G-DC-B$ 的度数为 45°． -----12 分



20.（本小题满分 12 分）

【解】（1） $y=a\cdot b^{x}$ 两边同时取自然对数得 $\ln y=\ln\left(a\cdot b^{x}\right)=\ln a+x\ln b$．

设 $\ln y=v$，所以 $v=\ln a+x\ln b$，

因为 $\overline{x}=3,\overline{v}=0.84,\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=55$，

所以 $\ln b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iv_i-5\overline{x}\overline{v}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=\dfrac{15.99-5\times3\times0.84}{55-5\times3^2}=0.339$．

把 $(3,0.84)$ 代入 $\overline{v}=\ln a+\overline{x}\ln b$，得 $\ln a=-0.177$，所以

$\hat{v}=-0.177+0.339x,\ln\hat{y}=-0.177+0.339x$，所以 $\hat{y}=\mathrm{e}^{-0.177+0.339x}$，

即 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=\mathrm{e}^{-0.177+0.339x}$． -------------6 分

（2）2018 年-2022 年中国 MCN 市场规模的 5 个数据中，与 $\overline{y}$ 的差的绝对值小于 1 的数据有 1.68, 2.45,3.35，共 3 个，所以 X 的取值依次为 1,2,3

$P(X=1)=\dfrac{C_3^1\cdot C_2^2}{C_5^3}=\dfrac{3}{10},P(X=2)=\dfrac{C_3^2\cdot C_2^1}{C_5^3}=\dfrac{3}{5},P(X=3)=\dfrac{C_3^3}{C_5^3}=\dfrac{1}{10}$

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

$E(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$. ------------12 分

21.（本小题满分 12 分）

【解】(1)（法一）证明：∵平面 $PAM\perp$平面 $ABCM$，$CM\perp CB$，

故以 C 为原点，CM、CB 为 x、y 轴，作 $Cz\,/\!/$平面 PAM，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 B（0，2，0），A（$2\sqrt{2}$，2，0），M（$\sqrt{2}$，0，0），

在图 1 中，作 $DO\perp AM$ 于点 O，过点 O 作 $OE\perp CD$ 于 E，$FO\perp BC$ 于点 F，

由题知，$AD=2$，$DM=\sqrt{2}$，$\therefore AM=\sqrt{6}$，$OD=\dfrac{AD\cdot DM}{AM}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore\cos\angle ODM=\dfrac{OD}{DM}=\dfrac{DE}{OD}$，$\therefore DE=\dfrac{\frac{4}{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$OF=CD-DE=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，

$OE=\sqrt{OD^2-DE^2}=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore P(\dfrac{4\sqrt{2}}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$，

$\therefore \overrightarrow{BP}=(\dfrac{4\sqrt{2}}{3},-\dfrac{4}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$，$\overrightarrow{AM}=(-\sqrt{2},-2,0)$，

$\therefore \overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AM}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\times(-\sqrt{2})+(-\dfrac{4}{3})\times(-2)+0=0$，

故 $PB\perp AM$.

(1)（法二）证明：过 $PO\perp AM$，连接 OB，

由法一可得：$PO=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，由勾股定理可得 $OM=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

$\cos\angle AMB=\dfrac{AM^2+BM^2-AB^2}{2AM\cdot BM}=\dfrac{6+6-8}{2\times6}=\dfrac{1}{3}$，

在△MBO 中，由余弦定理可得 $OB^2=OM^2+MB^2-2OM\cdot BM\cos\angle AMB=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore OB^2+OM^2=\frac{48}{9}+\frac{6}{9}=MB^2$，∵∴$OB\perp AM$，

∵$OB\cap OP=O$，

∴$AM\perp$平面 OPB，∵$PB\subset$平面 OPB，

∴$PB\perp AM$； --------6 分

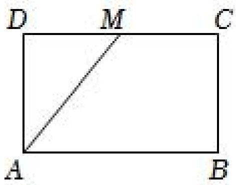


图1

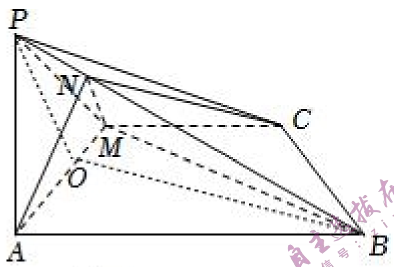


图2

（2）解：设 $\overrightarrow{PN}=\lambda\overrightarrow{PB},\lambda\in[0,1]$，则点 N $(\frac{4\sqrt{2}}{3}(1-\lambda),\frac{2}{3}(1+2\lambda),\frac{2\sqrt{3}}{3}(1-\lambda))$，

$\therefore \overrightarrow{AN}=(-\frac{2\sqrt{2}}{3}(1+2\lambda),\frac{4}{3}(\lambda-1),\frac{2\sqrt{3}}{3}(1-\lambda))$，

设平面 AMN 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AM}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AN}=0\end{cases}$，即

$$\begin{cases}-\sqrt{2}x-2y=0\\ -\frac{2\sqrt{2}}{3}(1+2\lambda)x+\frac{4}{3}(\lambda-1)y+\frac{2\sqrt{3}}{3}(1-\lambda)z=0\end{cases},$$

令 $y=-1$，则 $x=\sqrt{2}$，$z=\frac{2\sqrt{3}\lambda}{1-\lambda}$，$\therefore \vec{m}=(\sqrt{2},-1,\frac{2\sqrt{3}\lambda}{1-\lambda})$，

同理可得，平面 PAB 的法向量 $\vec{n}=$（0，$\sqrt{3}$，2），

∵平面 $AMN\perp$平面 PAB，

$\therefore \vec{m}\cdot\vec{n}=-\sqrt{3}+2\times\frac{2\sqrt{3}\lambda}{1-\lambda}=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{5}$，

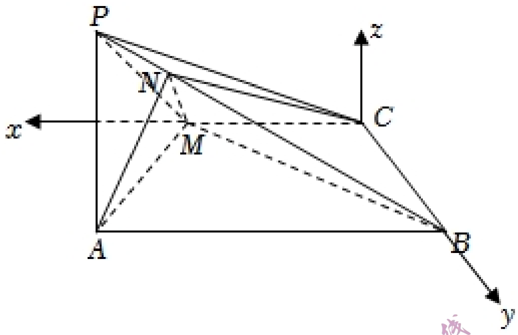
∴平面 AMN 的法向量 $\vec{m}=(\sqrt{2},-1,\frac{2\sqrt{3}\lambda}{1-\lambda})=(\sqrt{2},-1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，

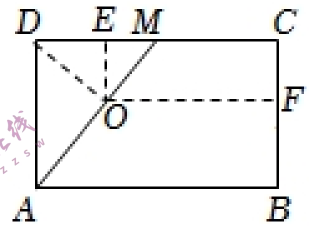
$\overrightarrow{AB}=(-2\sqrt{2},0,0)$，

设直线 AB 与平面 AMN 所成角为 θ，

$$\therefore \sin\theta=|\cos<\overrightarrow{AB},\vec{m}>|=\frac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}=\frac{|-4|}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2+1+\frac{3}{4}}}=\frac{2\sqrt{30}}{15}$$

故直线 AB 与平面 AMN 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{30}}{15}$．　　　　-------------12 分





22．（本小题满分 12 分）

【解】（1）由 $f(x)=x-a\ln x$ 得 $f'(x)=\frac{x-a}{x}$，

当 $a<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 x 无限趋近于 0 时，$f(x)<0$，

又 $f(1)=1>0$，故 $f(x)$ 只有 1 个零点；

当 $0<a<\mathrm{e}$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $x>a$，令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<a$，

故 $f(x)$ 在区间 $(0,a)$ 上单调递减，在区间 $(a,+\infty)$ 上单调递增；

所以当 $x=a$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $f(a)=a-a\ln a=a(1-\ln a)$，

当 $0<a<\mathrm{e}$ 时，$f(a)>0$，所以函数 $f(x)$ 无零点，

当 $a=0$ 时，$f(x)=x>0$ 恒成立，所以函数 $f(x)$ 无零点，

综上所述，当 $0\le a<\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 无零点，当 $a<0$ 时，$f(x)$ 只有一个零点；　---------6 分

（2）由已知有 $x-a\ln x\ge ax^{a}\ln x-x\mathrm{e}^{x}$，所以 $x+x\mathrm{e}^{x}\ge a\ln x+a\ln x\cdot x^{a}$，

所以 $x+x\mathrm{e}^{x}\ge a\ln x+(a\ln x)\cdot \mathrm{e}^{a\ln x}$，

构造函数 $g(x)=x+x\mathrm{e}^{x}$，则原不等式转化为 $g(x)\ge g(a\ln x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立，

$g'(x)=1+\mathrm{e}^{x}(x+1)$，记 $\varphi(x)=1+\mathrm{e}^{x}(x+1)$，所以 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^{x}(x+2)$，

令 $\varphi'(x)>0$，解得 $x>-2$，令 $\varphi'(x)<0$，解得 $x<-2$，

故 $\varphi(x)$ 在区间 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，在区间 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $\varphi(x)\ge\varphi(-2)=1-\frac{1}{e^2}>0$，所以 $g'(x)>0$，即 $g(x)$ 单调递增，

所以 $x\ge a\ln x$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立，

即 $a\le\frac{x}{\ln x}$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立，

令 $h(x)=\frac{x}{\ln x}$，$(x>1)$，则 $h'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，

令 $h'(x)>0$，解得 $x>e$，令 $h'(x)<0$，解得 $1<x<e$，

故 $h(x)$ 在 $(1,e)$ 单调递减，$(e,+\infty)$ 单调递增，

故 $h(x)$ 的最小值为 $h(e)=\frac{e}{\ln e}=e$，

故 a 的取值范围是 $(-\infty,e]$. ------------12 分