

姓名_____ 座位号_____

(在此卷上答题无效)

绝密★启用前

2023年池州市普通高中高三教学质量统一监测

数学试题

满分：150分 考试时间：120分钟

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的学校、姓名、班级、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 若集合 $A = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | y = \ln(2x - 3)\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$

- A. $\{x | \frac{3}{2} < x \leq 3\}$ B. $\{x | x \geq 3\}$ C. $\{x | x > 1\}$ D. $\{x | 1 \leq x \leq \frac{3}{2}\}$

2. 设复数 z 满足 $i(z+1) = -1+2i$, 则在复平面内 z 对应的点位于

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 已知两个随机变量 X, Y , 其中 $X \sim B(8, \frac{1}{2})$, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, 若 $\mu = E(X)$, $P(Y < 0) = 0.2$, 则

$P(4 \leq Y \leq 8) =$

- A. 0.2 B. 0.3 C. 0.4 D. 0.5

4. 某民俗博物馆内有一个通过鼓风对谷物除杂质的农具，如图1，该农具上方有一装谷物的容器，上方进料口和下方出料口均为长方形，四周是四个等腰梯形的木板围成。图2是该容器的直观图， $AB = 6dm, BC = 5dm, A_1B_1 = 4dm, B_1C_1 = 1dm$, 平面 $ABCD$ 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 间的距离为 $4dm$, 则图2几何体体积为

- A. $\frac{136 + 8\sqrt{30}}{3} dm^3$
 B. $\frac{188 + 8\sqrt{30}}{3} dm^3$
 C. $\frac{136}{3} dm^3$
 D. $\frac{188}{3} dm^3$

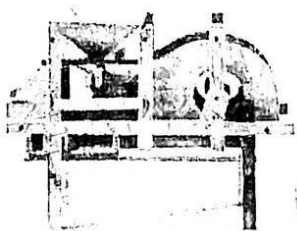


图1

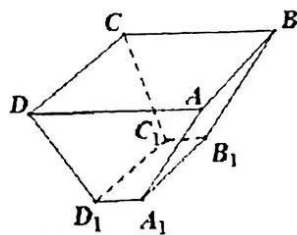
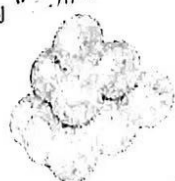


图2

5. 如图的形状出现在南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法·商功》中，后人称为“三角垛”。“三角垛”的最上层有1个小球，第二层有3个小球，第三层有6个小球……设各层球数构成数列 $\{a_n\}$ ，该数列从第二项起每一项与前一项的差构成等差数列，则该“三角垛”中第8层小球个数为



- A. 21 B. 28 C. 36 D. 45
6. 戏曲艺术是中华民族璀璨明珠和无价瑰宝。池州市某中学举办“戏曲进校园”活动，戏曲节目共5个，有黄梅戏《夫妻观灯》《女驸马》《谁料皇榜中状元》，傩戏《孟姜女洗澡结婚》和傩舞《舞千年》，主办方随机编排节目演出顺序，则傩戏和傩舞不相邻的概率为
- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

7. 已知函数 $f(x) = \frac{4}{e^x + 1}$ ，记 $g(x) = f'(x)$ ，则下列结论正确的是
- A. $f(x)$ 的值域为 $(4, +\infty)$ B. $g(x)$ 的值域为 $(0, 1]$
- C. $y = f(x) - 2$ 为奇函数 D. $y = g(x + 2)$ 为偶函数

8. 设 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点，点 A, B 均在 C 上，若 $\overrightarrow{F_1A} = 2\overrightarrow{F_2B}$ ， $2|F_1B| = 5|F_1A|$ ，则椭圆 C 的离心率为
- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

二、选择题（本大题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分）

9. 已知函数 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi) (|\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 图象过点 $(0, 1)$ ，将其向右平移 $a (a > 0)$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象，且 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 内单调递减，则

- A. $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 是 $f(x)$ 的对称中心 B. $\frac{\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 的极大值点
- C. $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$ 内单调递减 D. a 可以取 $\frac{2}{3}\pi$

10. 动点 M 与两定点 $A(1, 0), B(4, 0)$ 的距离的比为 $\frac{1}{2}$ ，点 M 的轨迹记为曲线 C ，点 $P(3\sqrt{2}, 0), Q(0, 3\sqrt{2})$ ，则

- A. C 上存在点 $M(x, y)$ ，使得 $x + \sqrt{3}y = 4$ B. C 上存在两点到直线 PQ 的距离为1
- C. C 上任意一点 M 都有 $|MP|^2 + |MQ|^2 \leq 68$ D. C 上存在点 M 使得 $\angle MPQ = 15^\circ$

11. 三棱锥 $A-BCD$ 中， $AD \perp BD$ ， $\angle BDC = 120^\circ$ ， $BD = CD = 2\sqrt{3}$ ， $AD = 6$ ，则

- A. 三棱锥 $A-BCD$ 体积的最大值为 $6\sqrt{3}$
- B. 不存在 AB 与 CD 垂直

- C. AB 与平面 BCD 所成角的正弦值最大为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- D. 当二面角 $A-BD-C$ 为 120° 时, 三棱锥 $A-BCD$ 的外接球表面积为 156π
12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 定义域均为 \mathbb{R} , 且 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增, 记 $g(x) = f'(x)$, 若 $f(3x-2) + f(4-3x) = f(3)$, $g(x) + g(4-x) = 4$, 则
- A. $f(-1) = 0$
- B. $f(f(1)) > f(0)$
- C. $g(f(-1)) < g(f(1))$
- D. $\sum_{k=1}^{2023} g(k) = 4046$

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知向量 $a = (2, 1)$, $b = (m, 2)$, 若 $(a-2b) \perp a$, 则 $m =$ _____.
14. 现有两批同种规格的产品, 第一批占 30%, 次品率为 6%; 第二批占 70%, 次品率为 5%. 将两批产品混合, 从混合产品中任取 1 件, 则这件产品是合格品的概率为 _____.
15. 关于 x 的不等式 $e^x - \frac{e^{ax}}{x} \leq a - 1 - \frac{\ln x}{x}$ 恒成立, 则 a 的取值范围为 _____.
16. 已知抛物线 $E: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过定点 $(2, 0)$ 的直线与抛物线交于 A, B 两点, AF 与 E 的另一个交点为 C , BF 与 E 的另一个交点为 D , 则 $|AC| + 2|BD|$ 的最小值为 _____.

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_n + a_n = 4$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $b_n = (a_n - 1)a_n$, T_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{1 - a \cos B}{a \cos C - 1} = \frac{2 \sin B \cos C}{\sin 2C}$.

(1) 证明: $a^2 = b + c$;

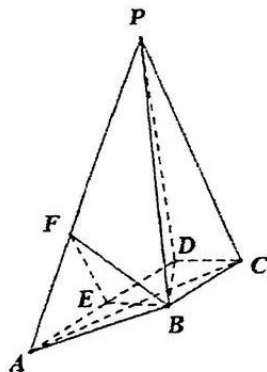
(2) D 是 BC 上的点, AD 平分 $\angle BAC$, 若 $a = 2, AD = \frac{\sqrt{10}}{2}$, 求 $\cos \angle BAC$.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PB \perp$ 底面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD = 2BC = 4, CD = 1, \angle ADC = 120^\circ$, E 为棱 AD 中点.

(1) 证明: $BE \perp PD$;

(2) 已知点 F 在棱 PA 上, $PF = 2FA$, 且二面角 $A-BE-F$ 大小为 60° , 求直线 AC 与平面 BEF 所成角的正弦值.



20. (本小题满分 12 分)
有人搜集了某城市近 10 年居民年收入 x 亿元 (所有居民在一年内收入的总和) 与 A 商品销售额 y 万元的数据, 并计算得 $\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 15^2$, $\sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = 25^2$, $\sum_{i=1}^{10} x_i = 380$, $\sum_{i=1}^{10} y_i = 390$, 建立商品销售额关于居民年收入一元线性回归模型, 由公式计算得 y 与 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = 1.56x + \hat{a}$

- (1) 求 \hat{a} 和相关系数 r 的值, 并根据 r 的值判断城市居民年收入与 A 商品销售额的相关性强弱 ($0.75 \leq |r| \leq 1$ 则认为 y 与 x 相关性很强, 否则不强)
- (2) 2022 年从该城市随机抽取 1000 户进行调查, 家庭收入情况和购买 A 商品户数数据统计如下表

收入情况	中等及以下收入	高收入
居民户数	800	200
购买 A 商品居民户数	400	150

以抽取的 1000 户中不同层次收入的家庭购买 A 商品的频率估计相应收入家庭购买 A 商品的概率, 且各户居民是否购买 A 商品互不影响, 在该 1000 户中按家庭收入分层, 用分层随机抽样方法从这 1000 户中抽取 5 户, 这 5 户居民中有 z 户居民购买 A 商品, 求 z 的分布列及期望.

附:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}, \quad \text{相关系数 } r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

21. (本小题满分 12 分)

设双曲线 $C: \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\sqrt{5}$, 点 A 在 C 上,

当 $AF_1 \perp AF_2$ 时, $\triangle AF_1F_2$ 的面积为 4.

(1) 求 C 的方程;

(2) 点 $M(2, 0)$, 点 P 在直线 $x = \frac{1}{c}$ 上, PA 与 C 相切, A 为切点, $PN \perp AM$, N 为垂足,

证明: 存在定点 Q , 使得 $|QN|$ 为定值.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + ax - ax \ln x$.

(1) 记 $g(x) = f'(x)$, 讨论函数 $g(x)$ 的单调性;

(2) 若有正实数 λ, μ 满足 $\lambda + \mu = 1$, 求证: 当 $a < 0$ 时, $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $f(\lambda x_1 + \mu x_2) \leq \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线