





二、填空题(本题共4小题,每小题5分,共20分.)

13. 已知  $f(x) = \begin{cases} \log_2 x - 3, & x > 0, \\ g(x), & x < 0 \end{cases}$  是奇函数, 则  $f(g(-2)) =$  \_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = \sin\left(x - \frac{1}{2}\right) + a$ , 若  $f(0) + f\left(\frac{1}{2020}\right) + f\left(\frac{2}{2020}\right) + \dots + f\left(\frac{2019}{2020}\right) + f(1) = 2021$ , 则实数  $a =$  \_\_\_\_\_.

15. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过  $F_1$  的直线  $l$  与圆  $x^2 + y^2 = a^2$  相切于点  $T$ , 且直线  $l$  与双曲线  $C$  的右支交于点  $P$ , 若  $\overrightarrow{F_1P} = 3\overrightarrow{F_1T}$ , 则双曲线  $C$  的离心率为 \_\_\_\_\_.

16. 正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长是1, 在正方体的表面上与点  $A$  的距离是  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  的点形成一条曲线, 这条曲线的长度是 \_\_\_\_\_. (参考数据  $\cos 37^\circ = \frac{4}{5}$ )

三、解答题(共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第17~21题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选考题, 考生根据要求作答.)

(一)必考题:共60分.

17. (本小题满分12分)

在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且  $\sin^2 A + \sin^2 C - \sin A \sin C = \sin^2 B$ .

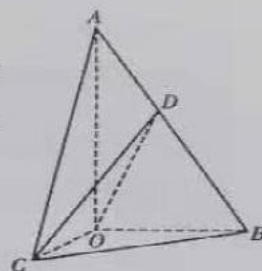
(1)求角  $B$  的大小;

(2)若  $\triangle ABC$  为锐角三角形, 其外接圆的半径为  $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ , 求  $\triangle ABC$  的周长的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

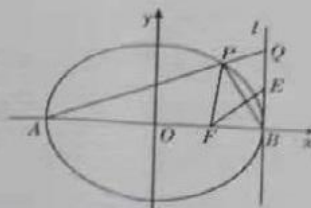
在  $\text{Rt}\triangle AOB$  中,  $\angle OAB = \frac{\pi}{6}$ , 斜边  $AB = 4$ .  $\text{Rt}\triangle AOC$  可以通过  $\text{Rt}\triangle AOB$  以直线  $AO$  为轴旋转得到, 且二面角  $B-AO-C$  为  $120^\circ$ . 点  $D$  满足  $\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{DB}$ .

- (1) 求证: 平面  $BOC \perp$  平面  $AOB$ ;  
(2) 求直线  $CD$  与平面  $AOB$  所成角的正弦值.



19. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{4t^2} + \frac{y^2}{3t^2} = 1 (t > 0)$  的左、右顶点分别为  $A, B$ , 右焦点为  $F$ , 过点  $A$  且斜率为  $k (k > 0)$  的直线交椭圆  $C$  于另一点  $P$ .



- (1) 求椭圆  $C$  的离心率;
- (2) 若  $t=1$ , 设直线  $l: x=2$ , 延长  $AP$  交直线  $l$  于点  $Q$ , 线段  $BQ$  的中点为  $E$ , 求证: 点  $B$  关于直线  $EF$  的对称点在直线  $PF$  上.

20. (本小题满分 12 分)

2019 年春节期间,当红影视明星翟天临“不知‘知网’”学术不端事件在全国闹得沸沸扬扬,引发了网友对亚洲最大电影学府北京电影学院乃至整个中国学术界高等教育乱象的反思.为进一步端正学风,打击学术造假行为,教育部日前公布的 2019 年部门预算中透露,2019 年教育部拟抽检博士学位论文约 6000 篇,预算为 800 万元.国务院学位委员会、教育部 2014 年印发的《博士硕士学位论文抽检办法》通知中规定:每篇抽检的学位论文送 3 位同行专家进行评议,3 位专家中有 2 位以上(含 2 位)专家评议意见为“不合格”的学位论文,将认定为“存在问题学位论文”;有且只有 1 位专家评议意见为“不合格”的学位论文,将再送 2 位同行专家进行复评,2 位复评专家中有 1 位以上(含 1 位)专家评议意见为“不合格”的学位论文,将认定为“存在问题学位论文”.设每篇学位论文被每位专家评议为“不合格”的概率均为  $p(0 < p < 1)$ ,且各篇学位论文是否被评议为“不合格”相互独立.

(1)相关部门随机地抽查了 300 位博士硕士的论文,每人一篇,抽检是否合格,抽检得到的部分数据如下表所示:

	合格	不合格
博士学位论文	150	50
硕士学位论文	50	

通过计算说明是否有 99.9% 的把握认为论文是否合格与作者的学位高低有关系?

(2)若  $p = \frac{1}{2}$ ,记一篇抽检的学位论文被认定为“存在问题学位论文”的概率为  $p_0$ ,求  $p_0$  的值;

(3)若拟定每篇抽检论文不需要复评的评审费用为 900 元,需要复评的评审费用为 1500 元;除评审费外,其他费用总计为 100 万元.现以此方案实施,且抽检论文为 6000 篇,问是否会超过预算?并说明理由.

参考公式:  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ,其中  $n = a + b + c + d$ .

临界值表:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.100	0.050	0.025	0.010	0.001
$k_0$	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = e^x - \frac{1}{2}ax^2 + 1$  有两个极值点  $x_1, x_2$  ( $e$  为自然对数的底数).

(1) 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 求证:  $\frac{x_1 + x_2}{2} < \ln a$ .

(二)选考题:共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分)选修 4-4:坐标系与参数方程

直角坐标系  $xOy$  中,曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x=1+\sqrt{3}\cos\alpha, \\ y=\sqrt{3}\sin\alpha \end{cases}$  (其中  $\alpha$  为参

数),直线  $l$  的方程为  $x+\sqrt{3}y-2=0$ .以坐标原点  $O$  为极点,以  $x$  轴的非负半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求曲线  $C$  的普通方程和直线  $l$  的极坐标方程;

(2)已知射线  $OA:\theta=\frac{\pi}{3}$  与曲线  $C$  和直线  $l$  分别交于  $M$  和  $N$  两点,求线段  $MN$  的长.

23. (本小题满分 10 分)选修 4-5:不等式选讲

已知关于  $x$  的不等式  $|x-m|+2x\leq 0$  的解集为  $(-\infty,-1]$ ,其中  $m>0$ .

(1)求  $m$  的值;

(2)若正数  $a,b,c$  满足  $a+b+c=m$ ,求证: $\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}\geq 1$ .



## 专注名校多元录取

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站 (www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

### 温馨提示：

**全国重点中学 2020 届高三上学期期中考试试题及答案汇总** (更新下载中)，点击链接获得  
<http://www.zizzs.com/c/201911/40242.html>