

百校联盟 2021 届普通高中教育教学质量监测考试
全国卷 理科数学

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分.
2. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷相应的位置.
3. 全部答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.
4. 本试卷满分 150 分,测试时间 120 分钟.
5. 考试范围:高考全部内容.

第 I 卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | y = \sqrt{\ln x}\}$, $B = \{x | x^2 - 3x + 2 > 0\}$, 则 $A \cap B =$

A. $\{x | x > 2\}$ X
B. $\{x | 0 < x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$ A
C. $\{x | x > e\}$ X
D. $\{x | x = 1 \text{ 或 } x > 2\}$

2. 设复数 $z = 1 + \frac{2i}{3-i}$, 则 $\bar{z} =$

A. $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ X
B. $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ A
C. $\frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$ X
D. $-\frac{6}{5} + \frac{3}{5}i$

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q \neq 1$, 且 $a_1 + a_2 = 2a_3$, 则 $\frac{a_7}{a_5} =$

A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{4}$

4. 下表为 2020 年 1~6 月全国规模以上工业企业各月累计利润率, 若 y 与 x 具有线性相关关系, 且回归方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$, 且由数据可得 $\hat{a} \neq \hat{b}$, 则

A. $\hat{b} > 0, 3\hat{b} + \hat{a} = 4.47$ A
B. $\hat{b} < 0, 3\hat{b} + \hat{a} = 4.47$ X
C. $\hat{b} > 0, 3\hat{a} + \hat{b} = 4.47$ X
D. $\hat{b} < 0, 3\hat{a} + \hat{b} = 4.47$ X

月份	1~2	1~3	1~4	1~5	1~6
一月份代码 x	1	2	3	4	5
累计利润率 $y(\%)$	3.54	3.94	4.45	4.95	5.42

5. 已知点 O 为坐标原点, 点 $F(\frac{3}{2}, 0)$ 为抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的焦点, 直线 $l: my - n = 0$ 与抛物线 C 交于 A, B 两点, 若 $OA \perp OB$, 则

- A. $m = 6$ B. $n = 5$
C. $mn = 6$ D. $n = 6m$

6. $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 为边 BC 上动点, 且 $\vec{AE} = \lambda(\vec{AB} + \vec{AC}) + \mu\vec{AD}$, 则 $\lambda\mu$ 的最大值为

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{8}$

7. $(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})(x-1)^6$ 展开式中的常数项为

- A. 11 B. 19 C. 23 D. -11

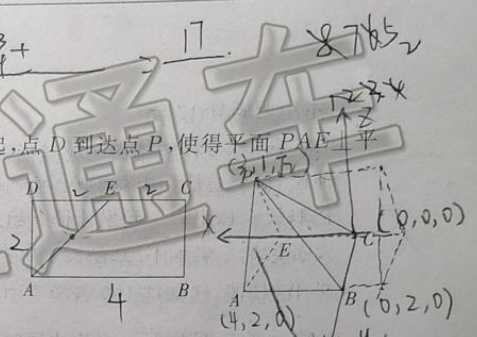
8. 在新冠疫情的冲击下, 全球经济受到重创, 下图是各国公布的 2020 年第二季度国内生产总值(GDP)同比增长率, 现从这 8 个国家中任取 4 个国家, 则这 4 个国家中第二季度 GDP 同比增长率至少有 2 个不小于 -15% 的概率为



- A. $\frac{17}{70}$
B. $\frac{18}{35}$
C. $\frac{26}{35}$
D. $\frac{53}{70}$

9. 矩形 ABCD 中, $AB=4, AD=2$, 点 E 为 CD 中点, 沿 AE 把 $\triangle ADE$ 折起, 点 D 到达点 P, 使得平面 PAE \perp 平面 ABCE, 则异面直线 AB 与 PC 所成角的余弦值为

- A. $\frac{1}{4}$
B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$



10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1, & x \geq 0 \\ \frac{a}{2^x}, & x < 0 \end{cases}$, 若存在 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $f(x) \geq f(x_0)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是

- A. $[2\sqrt{2}-2, +\infty)$
B. $(2\sqrt{2}-2, +\infty)$
C. $(0, 2\sqrt{2}-2)$
D. $(0, 2\sqrt{2}-2]$

11. 已知过双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 左焦点的直线 l 与双曲线 C 的右支有公共点, 且与圆 $x^2 + y^2 = 2a^2$ 相切, 则双曲线 C 的离心率的取值范围为

- A. $(1, \sqrt{3})$
B. $(\sqrt{3}, +\infty)$
C. $(1, 2)$
D. $(2, +\infty)$

12. 已知函数 $f(x) = 2|\sin x| \cos x + \sqrt{3} \cos 2x$, 给出下列结论:

- ① $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称; ② $f(x)$ 的值域为 $[-2, 2]$; ③ $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}]$ 上是减函数; ④ 0 是 $f(x)$ 的极大值点. 其中正确的结论有

- A. ①④
B. ②③
C. ①②③
D. ①②④

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13 题~第 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22 题~第 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分.

13. 曲线 $f(x) = \sqrt{x+1} + \sin x + 1$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = \frac{3}{2}x + 2$.

14. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x+y-5 \leq 0 \\ x-2y-2 \leq 0 \\ 2x-y+2 \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = x - 3y$ 的取值范围为 $[-1, 4]$.

15. 已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $\frac{a_8}{a_5} = 3$, 则 $\frac{8a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14}}{S_5} = 2 + \frac{2d}{a_5}$.

16. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 中心为 M, 则四棱锥 $M-ABCD$ 的外接球被平面 ABB_1A_1 截得的截面面积为 $\frac{3}{2}$.

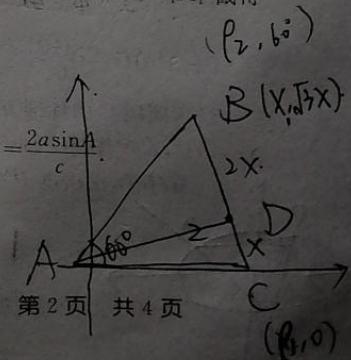
三、解答题: 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A 为锐角且角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, $\frac{\sqrt{3} \sin B}{\tan C} + \sqrt{3} \cos B = \frac{2a \sin A}{c}$.

(1) 求 A;

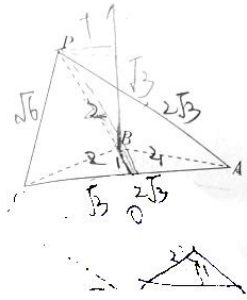
(2) 若点 D 在边 BC 上, 且 $BD = 2DC$, 且 $AD = 2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.



18. (本小题满分 12 分)

如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\angle PBA = \angle CBA = \frac{2\pi}{3}$, $AB = BC = BP = 2$, $PC = \sqrt{6}$.

- (1) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 ABC ;
(2) 求平面 PAC 与平面 PBC 所成锐二面角的余弦值.



19. (本小题满分 12 分)

蚂蚁森林是支付宝推出的公益活动,用户可以通过步行、在线缴费等减排行为获得积分,参与在荒漠化地区种树.该公益活动曾获得联合国“地球卫士奖”.蚂蚁森林 2016 年 8 月在支付宝上线.截止 2020 年 8 月 5.5 亿蚂蚁森林用户一起累计种下超过 2.2 亿颗真树.用户通过蚂蚁森林一年种植 3 棵树,可获得当年度全民义务植树尽责证书.某高校学生会调查了该校 100 名学生通过蚂蚁森林获得 2020 年度全民义务植树尽责证书的情况.已知这 100 名学生中有男生 70 名,男生中通过蚂蚁森林获得 2020 年度全民义务植树尽责证书人数占男生总数的 $\frac{6}{7}$,女生中通过蚂蚁森林获得 2020 年度全民义务植树尽责证书人数占女生总数的 $\frac{2}{3}$.

- (1) 填写下列 2×2 列联表,并判断是否有 95% 的把握认为该校学生的性别与通过蚂蚁森林获得 2020 年度全民义务植树尽责证书有关系?

	男生	女生	合计
获得 2020 年度全民义务植树尽责证书			
未获 2020 年度得全民义务植树尽责证书			
合计			

- (2) 若把这 100 名学生通过蚂蚁森林获得 2020 年度全民义务植树尽责证书的频率作为该校每个学生通过蚂蚁森林获得 2020 年度全民义务植树尽责证书的概率,从全校所有学生中随机取出 4 个人,记这 4 人中通过蚂蚁森林获得 2020 年度全民义务植树尽责证书的人数与未通过蚂蚁森林获得 2020 年度全民义务植树尽责证书的人数之差为 X ,求 X 的分布列与期望.

附:

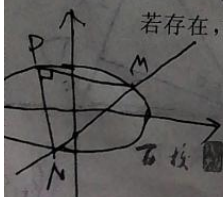
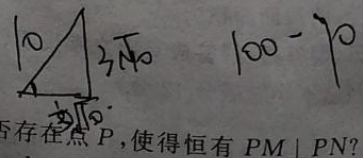
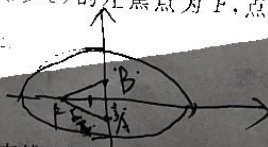
$P(K^2 \geq k_0)$	0.05	0.01	0.005	0.001
k_0	3.841	6.635	7.879	10.828

$$n = a + b + c + d, K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 点 $A(0, -\frac{1}{3}), B(0, \frac{1}{3})$ 三等分椭圆 C 的短轴, 且 $\sin \angle FAB = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
(2) 过点 A 作与 x 轴不垂直的直线 l 与椭圆 C 交于点 M, N , 椭圆 C 上是否存在点 P , 使得恒有 $PM \perp PN$? 若存在, 求出点 P 坐标; 若不存在, 请说明理由.



21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2(\ln x - \frac{1}{2}) - 2ax(\ln x - 1)$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若 $1 < a < 2$, 判断 $f(x)$ 的零点个数.

$$2x \ln x + (2x - 2a) \cdot \frac{1}{x}$$

$$2 \ln x + (2x - 2a) \cdot \frac{1}{x}$$

请考生从第 22、23 题中任选一题作答,并用 2B 铅笔将答题卡上所选题目对应的方框涂黑,按所选涂题号进行评分;多涂、多答,按所涂的首题进行评分;不涂,按本选考题的首题进行评分.

22. (本小题满分 10 分)【选修 4-4:坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1}{t^2+1} \\ y = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴

为极轴建立极坐标系,圆 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4\sin(\theta + \frac{\pi}{3})$.

- (1) 求 C_1 的普通方程, C_2 的直角坐标方程;
(2) 判断曲线 C_1 与圆 C_2 的公共点个数.

X

$$t^2 = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{x - 1}{x + 1}$$

$$y^2 + x^2 = 2\sqrt{3}x$$

$$(x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = 2$$

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + y^2 - 2y + 1 = 4$$

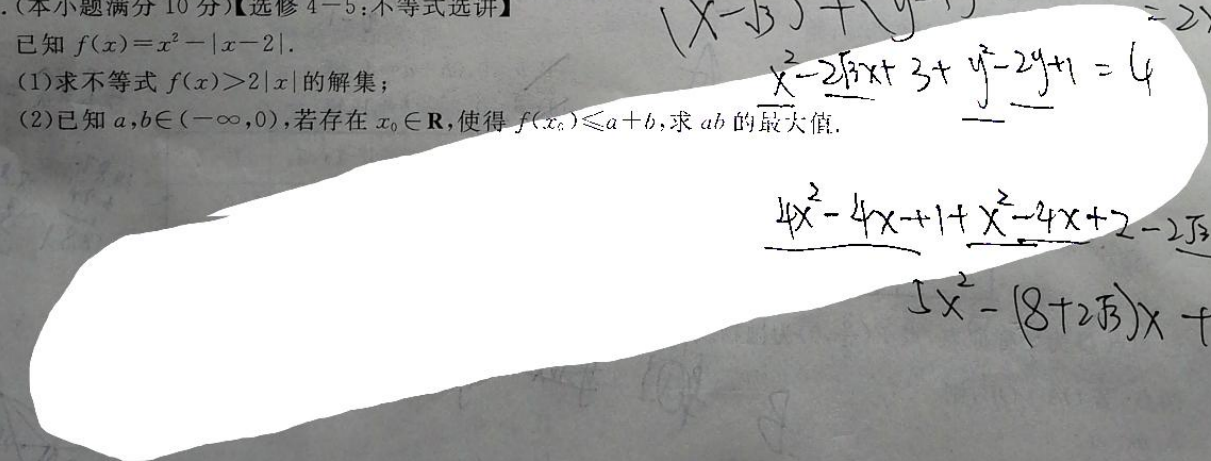
$$4x^2 - 4x + 1 + x^2 - 4x + 2 - 2\sqrt{3}x$$

$$5x^2 - (8 + 2\sqrt{3})x + 3 = 0$$

23. (本小题满分 10 分)【选修 4-5:不等式选讲】

已知 $f(x) = x^2 - |x - 2|$.

- (1) 求不等式 $f(x) > 2|x|$ 的解集;
(2) 已知 $a, b \in (-\infty, 0)$, 若存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_0) \leq a + b$, 求 ab 的最大值.



关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办公念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。



 微信搜一搜

 自主选拔在线