1.【答案】A

【解析】$A\cap B=\{x|2<x\le 3\}$，选 A.

2.【答案】C

【解析】$\vec{a}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=1+1\times 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，选 C.

3.【答案】C

【解析】$z_1=1-\mathrm{i}, z_1, z_2$ 对应的点关于 $x=y$ 对称，$z_2=-1+\mathrm{i}$，

$|z_1-z_2|=|2-2\mathrm{i}|=2\sqrt{2}$

4.【答案】D

【解析】$a+c=S_1+R, a-c=S_2+R, b^2=a^2-c^2=(S_1+R)(S_2+R)$，

$b=\sqrt{(S_1+R)(S_2+R)}, 2b=2\sqrt{(S_1+R)(S_2+R)}$，选 D.

5.【答案】B

【解析】$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha+\cos\alpha=\frac{3}{5}, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha=\frac{3}{5}$，

$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}, \cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=1-2\times\frac{9}{25}=\frac{7}{25}$，

选 B.

6.【答案】D

【解析】乙、丙一定都正确，则 $\mu=m, P(X>m+1)=P(X<m-1)>P(X<m-2)$，

甲正确，$\therefore$ 丁错，选 D.

7.【答案】A

【解析】$f(2x+1)$ 为偶函数，则 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，$f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$ 关于 $x=1$

对称，$f(x)+f(x+2)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin\left[\frac{\pi}{3}(x+2)+\frac{\pi}{6}\right]$

$=2\left[\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{5}{6}\pi\right)\right]$

$=2\left[\sin\frac{1}{3}\pi\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}x\cos\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{5}{6}\pi\right]=2\cos\frac{1}{3}\pi x$.

$f(x+1)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\frac{1}{3}\pi x, \therefore f(x+1)=f(x)+f(x+2)$，

即 $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{3}\pi x+\frac{\pi}{6}\right)$ 满足条件，$f(18)=2\sin\left(6\pi+\frac{\pi}{6}\right)=1$.

8.【答案】D

【解析】设切点 $\left(x_0,(1-x_0)\mathrm{e}^{x_0}\right), y'=-\mathrm{e}^x+(1-x)\mathrm{e}^x=-x\mathrm{e}^x, k=-x_0\mathrm{e}^{x_0}$，

$y-(1-x_0)\mathrm{e}^{x_0}=-x_0\mathrm{e}^{x_0}(x-x_0)$ 过 $(t,0), -(1-x_0)\mathrm{e}^{x_0}=-x_0\mathrm{e}^{x_0}(t-x_0)$，

$x_0-1=-x_0(t-x_0), \therefore x_0-1=-tx_0+x_0^2, x_0^2-(t+1)x_0+1=0$ 有两个不相等实根 x_1, x_2，

其中 $x_1x_2=1, x_1+x_2=t+1, \Delta=(t+1)^2-4>0, \therefore t>1$ 或 $t<-3$

$y_1y_2=(1-x_1)(1-x_2)\mathrm{e}^{x_1+x_2}=\left[1-(x_1+x_2)+x_1x_2\right]\mathrm{e}^{x_1+x_2}=(1-t)\mathrm{e}^{t+1}$，

令 $g(t)=(1-t)\mathrm{e}^{t+1}, t>1$ 或 $t<-3, g'(t)=-t\mathrm{e}^{t+1}$，

$t<-3$时，$g'(t)>0, g(t)\nearrow, 0<g(t)<g(-3)=4e^{-2}$

$t>1$时，$g'(t)<0, g(t)\searrow, g(t)<g(1)=0$，

综上：$y_1y_2\in(-\infty,0)\cup(0,4e^{-2})$，选 D.

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9.【答案】ABD

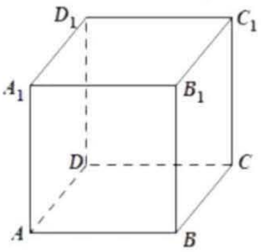
【解析】$AD_1 /\!/ BC_1, AD_1\not\subset$平面$BOC_1, BC_1\subset$平面$BOC_1, \therefore AD_1 /\!/$平面$BOC_1$,A 对

$BD\perp CO, BD\perp CC_1, CD\cap CC_1=C, \therefore BD\perp$平面$COC_1$,B 对

$C_1C\perp$平面$ABCD, C_1O$与平面$ABCD$所成角为$\angle C_1OC, \tan\angle C_1OC=\frac{2}{\sqrt{2}}\neq 1$，

$\therefore \angle C_1OC\neq 45^\circ$,C 错.

$V_{C-BOC_1}=V_{C_1-BOC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 1\times 2=\frac{2}{3}$，$D$ 对.选 ABD



10.【答案】ACD

【解析】$\frac{T}{2}=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}, \therefore T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}, \therefore \omega=2, f(x)=\sin(2x+\varphi)$，

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\varphi\right)=1, \therefore \varphi=-\frac{\pi}{6}$,A 对，$B$ 错.

$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right), 2x-\frac{\pi}{6}=k\pi, x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$

$k=0$时，$f(x)$关于$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$对称，C 对

$.-\frac{\pi}{2}+2k\pi<2x-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}+2k\pi, -\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$，

$f(x)$在$\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{4}{3}\pi\right)\nearrow$,而$\left(\pi,\frac{5}{4}\pi\right)\subset\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{4}{3}\pi\right), \therefore f(x)$在$\left(\pi,\frac{5}{4}\pi\right)\nearrow$,$D$ 对，

选 ACD.

11.【答案】AC

【解析】$P(A)=\frac{1}{3}$,A 对.

A,B 可同时发生，即“即第一次取红球，第二次取黄球”，A,B 不互斥，B 错.

在第一次取到红球的条件下，第二次取到黄球的概率为$\frac{1}{2}$,C 对.

$P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 0=\frac{1}{3}, P(AB)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}, P(AB)\neq P(A)P(B), \therefore A,B$不独立，

D 错，选 AC.

12.【答案】BCD

【解析】: $A\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right),B\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right),C\left(x_0,\frac{x_0^2}{4}\right),y'=\frac{1}{2}x,k_1=\frac{1}{2}x_1$,

$l_1: y-\frac{x_1^2}{4}=\frac{1}{2}x_1\left(x-x_1\right)$，即 $y=\frac{1}{2}x_1x-\frac{1}{4}x_1^2$

$l_2: y=\frac{1}{2}x_2x-\frac{1}{4}x_2^2$，

$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x_1x-\frac{1}{4}x_1^2\\ y=\frac{1}{2}x_2x-\frac{1}{4}x_2^2\end{cases},\therefore\begin{cases}x=\frac{x_1+x_2}{2}\\ y=\frac{x_1x_2}{4}\end{cases}$，即 $x_3=\frac{x_1+x_2}{2}$ 时，

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\left(x_1-\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_1x_2}{4}\right)\left(x_2-\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_2^2}{4}-\frac{x_1x_2}{4}\right)$

$=\left(\frac{x_1-x_2}{2},\frac{x_1\left(x_1-x_2\right)}{4}\right)\left(\frac{x_2-x_1}{2},\frac{x_2\left(x_2-x_1\right)}{4}\right)$

$=-\frac{\left(x_1-x_2\right)^2}{4}-\frac{x_1x_2\left(x_1-x_2\right)^2}{16}=-\frac{\left(x_1-x_2\right)}{16}\left(4+x_1x_2\right)$不一定为$0$,$A$错.

$|AF|\cdot|BF|=\left(\frac{x_1^2}{4}+1\right)\left(\frac{x_2^2}{4}+1\right)=\frac{x_1^2x_2^2}{16}+\frac{x_1^2}{4}+\frac{x_2^2}{4}+1,$

$DF^2=\frac{\left(x_1+x_2\right)^2}{4}+\left(\frac{x_1x_2}{4}-1\right)^2=\frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4}+\frac{x_1^2x_2^2}{16}-\frac{x_1x_2}{2}+1$

$=\frac{x_1^2x_2^2}{16}+\frac{x_1^2}{4}+\frac{x_2^2}{4}+1=|AF||BF|$,C对

$D\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{4}\right),P\left(\frac{x_1+x_0}{2},\frac{x_1x_0}{4}\right),Q\left(\frac{x_2+x_0}{2},\frac{x_2x_0}{4}\right),$

$AP=\sqrt{\left(\frac{x_0-x_1}{2}\right)^2+\left(\frac{x_1x_0-x_0^2}{4}\right)^2}=\frac{|x_0-x_1|\sqrt{4+x_1^2}}{4},$

$CQ=\sqrt{\left(\frac{x_2-x_0}{2}\right)^2+\left(\frac{x_2x_0-x_0^2}{4}\right)^2}=\frac{|x_2-x_0|\sqrt{4+x_0^2}}{4},$

$PC=\sqrt{\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^2+\left(\frac{x_1x_0-x_0^2}{4}\right)^2}=\frac{|x_1-x_0|\sqrt{4+x_0^2}}{4}$

$PD=\sqrt{\left(\frac{x_2-x_0}{2}\right)^2+\left(\frac{\left(x_0-x_2\right)x_1}{4}\right)^2}=\frac{|x_2-x_0|\sqrt{4+x_1^2}}{4}$

$\therefore AP\cdot CQ=PC\cdot PD$,D对

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.【答案】4

【解析】 $f(-2)=1+\log_2\left(2-(-2)\right)=1+\log_2 4=3$,

$f\left(f(-2)\right)=f(3)=2^{3-1}=2^2=4$

14.【答案】$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

【解析】可构造等比数列，$a_na_{n+1}<0$，则公比为负数，$|a_n|>|a_{n+1}|,\therefore 1>|q|$，

q 取 $-\frac{1}{2},a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

15.【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】$A\left(\sqrt{3},0\right),B\left(0,1\right),PA=PB,\therefore P$ 在 AB 的垂直平分线 $y=\sqrt{3}x-1$ 上，

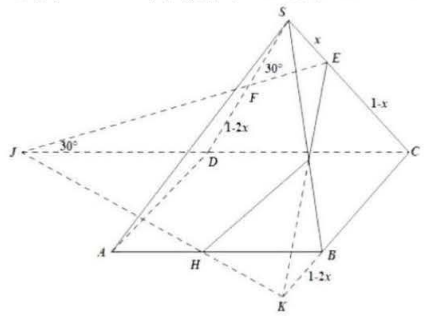
P 在圆 $O:x^2+y^2=r^2$ 满足条件的 P 有且仅有一个，$\therefore$ 直线与圆相切，$\therefore r=\frac{1}{2}$

16.【答案】5；$\frac{\sqrt{2}}{3}$

【解析】方法一：Γ 的边数至多为 5，延长 EF,CD 交于点 J，

延长 EI,CB 交于点 K，连接 JK 分别与 AD,AB 交于 G,H，

连接 FG,HI 得截面五边形 $EFGHI$



设 $SE=x,\therefore SF=2x,EF=\sqrt{3}x,CJ=2-2x,\therefore JD=1-2x=DG,JF=\sqrt{3}\left(1-2x\right)$，

$JK=\sqrt{2}\left(2-2x\right)=2\sqrt{2}\left(1-x\right),JG=HK=\sqrt{2}\left(1-2x\right),FG=1-2x,$

$\therefore JG^2+FG^2=JF^2,\therefore JG\perp GF$

$\therefore S_{\triangle JGF}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\left(1-2x\right)\cdot\left(1-2x\right)=S_{\Delta JHK}$，而 $EJ=\sqrt{3}\left(1-x\right)=EK,JK=2\sqrt{2}\left(1-x\right)$，

$S_{\Delta EJK}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}(1-x)^2=\sqrt{2}(1-x)^2$，

显然五边形时截面面积最大，

$\therefore S_{截面五边形}=\sqrt{2}(1-x)^2-\sqrt{2}(1-2x)^2$

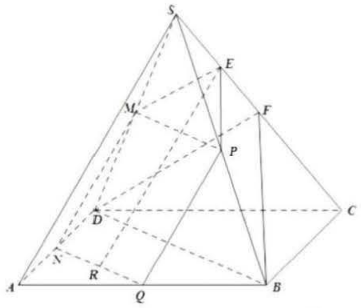
$=\sqrt{2}\left(-3x^2+2x\right)\le\sqrt{2}\cdot\frac{-4}{-12}=\frac{\sqrt{2}}{3},x=\frac{1}{3}$ 时取“=”，

$\therefore\Gamma$ 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

应填：$5;\frac{\sqrt{2}}{3}$

方法二：取 SC 中点 $F,BF\perp SC,DF\perp SC,\therefore SC\perp$ 平面 BDF .

作平面与 BDF 平行，如图至多为五边形.



令 $\frac{SE}{SF}=\lambda, \therefore EP=\lambda BF=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda, SP=\lambda SB=\lambda$，

$\therefore PB=1-\lambda, BQ=1-\lambda, PQ=1-\lambda, NQ=MP=\lambda BD=\sqrt{2}\lambda$

$\cos\angle DFB=\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-2}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{3}, \sin\angle DFB=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$

$S_{\triangle EMP}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{4}\lambda^2$

MN 与 NQ 的夹角为 SA 与 BD 夹角，而 SA 与 BD 垂直，

$\therefore S_{PMNQ}=\sqrt{2}\lambda(1-\lambda), S=\sqrt{2}\lambda(1-\lambda)+\frac{\sqrt{2}}{4}\lambda^2=-\frac{3}{4}\sqrt{2}\lambda^2+\sqrt{2}\lambda$，

$\lambda=\frac{2}{3}$ 时，S 取最大值 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】

（1）设 $\{a_n\}$ 公差为 d，若选①②，

则 $\begin{cases}S_1S_4=S_2^2\\a_4=2a_2+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1(4a_1+6d)=(2a_1+d)^2\\a_1+3d=2(a_1+d)+2\end{cases}\Rightarrow d=2a_1$

$\therefore 7a_1=6a_1+2, a_1=2, d=4, \therefore a_n=2+4(n-1)=4n-2$.

若选①③或②③同理可得 $a_n=4n-2$

（2）$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(4n-2)(4n+2)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$\therefore \frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{4(2n+1)}$.

18.【解析】

（1）2×2 列联表如下：

	喜欢足球	不喜欢足球	合计
男生	60	40	100

女生	30	70	100
合计	90	110	200

$K^2=\dfrac{200\times(60\times70-40\times30)^2}{100\times100\times90\times110}\approx18.182>10.828$,

$\therefore$有99.9%的把握认为该校学生喜欢足球与性别有关

（2）3 人进球总次数ξ的所有可能取值为$0,1,2,3$

$P(\xi=0)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{18},P(\xi=1)=C_2^1\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{5}{18}$

$P(\xi=2)=C_2^1\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{9},P(\xi=3)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{9}$

$\therefore\xi$的分布列如下：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

$\therefore\xi$的数学期望:$E(\xi)=1\times\dfrac{5}{18}+2\times\dfrac{4}{9}+3\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{11}{6}$.

19.【解析】

（1）$\because a\cos B-2a\cos C=(2c-b)\cos A$,

$\therefore\sin A\cos B-2\sin A\cos C=(2\sin C-\sin B)\cos A$

$\Rightarrow\sin A\cos B+\cos A\sin B=2\sin A\cos C+2\cos A\sin C$

$\Rightarrow\sin(A+B)=2\sin(A+C)$

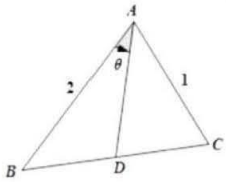
$\Rightarrow\sin C=2\sin B\Rightarrow c=2b,c=\sqrt{3}a\Rightarrow b=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$,

$\therefore\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+3a^2-\frac{3}{4}a^2}{2a\cdot\sqrt{3}a}=\dfrac{13\sqrt{3}}{24}$.

（2）由（1）知$c=2b,\because b=1,\therefore c=2$，设$\angle BAD=\theta$，

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot\sin2\theta=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot AD\cdot\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot AD\cdot\sin\theta$

$\Rightarrow AD=\dfrac{4}{3}\cos\theta,\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),\therefore AD\in\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$

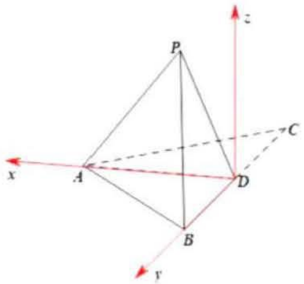


20.【解析】

（1）证明：$\because PD\perp AD,AD\perp BD,PD\cap BD=D,\therefore AD\perp$平面$PBD,\therefore AD\perp PB$，

又$\because PB\perp AB,AD,AB\subset$平面$ABD,AD\cap AB=A,\therefore PB\perp$平面$ABD$

（2）如图建系，则$B(0,2,0),P(0,2,4),A(4,0,0),D(0,0,0)$，



$\therefore \overrightarrow{BP}=(0,0,4),\overrightarrow{PA}=(4,-2,-4),\overrightarrow{DA}=(4,0,0)$，

设平面 BPA 与平面 PAD 的一个法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1),\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

$\therefore \begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BP}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PA}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4z_1=0\\ 4x_1-2y_1-4z_1=0\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(1,2,0)$,

$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PA}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{DA}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x_2-2y_2-4z_2=0\\ 4x_2=0\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{n_2}=(0,2,-1)$,

设二面角 $B-PA-D$ 平面角为 θ，

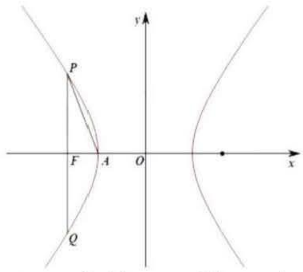
$\therefore |\cos\theta|=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{4}{\sqrt5\cdot\sqrt5}=\dfrac{4}{5},\therefore \sin\theta=\dfrac{3}{5}$.

21.【解析】

（1）当 $PQ\perp x$ 轴时，$PQ=\dfrac{2b^2}{a},PF=\dfrac{b^2}{a}$，

$\therefore\begin{cases}(\dfrac{b^2}{a})^2+(c-a)^2=10\\ \dfrac12\cdot\dfrac{2b^2}{a}\cdot(c-a)=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{b^2}{a}=3\\ c-a=1\\ c^2=a^2+b^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=\sqrt3\end{cases}$,

$\therefore$ 双曲线 C 的方程为：$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.



（2）方法一：设 PQ 方程为 $x=my-2,P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，

$\begin{cases}x=my-2\\ 3x^2-y^2=3\end{cases}\Rightarrow 3(m^2y^2-4my+4)-y^2=3\Rightarrow(3m^2-1)y^2-12my+9=0$,

以 PQ 为直径的圆的方程为 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

$\Rightarrow x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2+y^2-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$,

由对称性知以 PQ 为直径的圆必过 x 轴上的定点，令 $y=0$

$\Rightarrow x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2+y_1y_2=0$，而 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)-4=\dfrac{12m^2}{3m^2-1}-4=\dfrac{4}{3m^2-1}$，

$x_1x_2=(my_1-2)(my_2-2)=m^2y_1y_2-2m(y_1+y_2)+4$

$=\dfrac{9m^2}{3m^2-1}-2m\cdot\dfrac{12m}{3m^2-1}+4=\dfrac{-3m^2-4}{3m^2-1}$，

$\therefore x^2-\dfrac{4}{3m^2-1}x+\dfrac{-3m^2-4}{3m^2-1}+\dfrac{9}{3m^2-1}=0\Rightarrow(3m^2-1)x^2-4x+5-3m^2=0$

$\Rightarrow\left[(3m^2-1)x+3m^2-5\right](x-1)=0$ 对 $\forall m\in\mathbf{R}$ 恒成立，$\therefore x=1$.

$\therefore$ 以 PQ 为直径的圆经过定点 $(1,0)$.

方法二：设 PQ 方程为 $x=my-2,P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，

$\begin{cases}x=my-2\\3x^2-y^2=3\end{cases}\Rightarrow(3m^2-1)y^2-12my+9=0,$

由对称性知以 PQ 为直径的圆必过 x 轴上的定点.

设以 PQ 为直径的圆过 $E(t,0)$，

$\therefore\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{EQ}=0\Rightarrow(x_1-t)(x_2-t)+y_1y_2=0\Rightarrow x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2+y_1y_2=0$，

而 $x_1x_2=(my_1-2)(my_2-2)=m^2y_1y_2-2m(y_1+y_2)+4$

$=m^2\cdot\dfrac{9}{3m^2-1}-2m\cdot\dfrac{12m}{3m^2-1}+4=\dfrac{-3m^2-4}{3m^2-1}$，

$x_1+x_2=m(y_1+y_2)-4=\dfrac{12m^2}{3m^2-1}-4=\dfrac{4}{3m^2-1}$

$\therefore\dfrac{-3m^2-4}{3m^2-1}-\dfrac{4t}{3m^2-1}+t^2+\dfrac{9}{3m^2-1}=0$，

$(3m^2-1)t^2-4t+5-3m^2=0$，即 $\left[(3m^2-1)t+3m^2-5\right](t-1)=0$ 对 $\forall m\in\mathbf{R}$ 恒成立，

$\therefore t=1$，即以 PQ 为直径的圆经过定点 $(1,0)$

22.【解析】

（1）$f'(x)=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{e^{x-1}-e^{x-1}\cdot x}{\left(e^{x-1}\right)^2}=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1-x}{e^{x-1}}$，令 $f'(x)=0\Rightarrow x=1$.

$\because f(x)$ 有最大值，$\therefore a>0$ 且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上↗；$(1,+\infty)$ 上↘，$\therefore f(x)_{\max}=f(1)=\dfrac{1}{a}$.

$a=1$ 时，$g'(x)=\dfrac{1-a-\ln x}{x^2}=\dfrac{-\ln x}{x^2}$，

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0,g(x)$↗；当 $x>1$ 时，$g'(x)<0,g(x)$↘，

$\therefore g(x)_{\max}=g(1)=a,\therefore\dfrac{1}{a}=a\Rightarrow a=1$

（2）方法：由 $f(x)=b\Rightarrow\dfrac{x}{e^{x-1}}-b=0$，由 $g(x)=b\Rightarrow\dfrac{1+\ln x}{x}-b=0$，

令 $F(x)=\dfrac{x}{e^{x-1}}-b,F(x)$ 在 $(0,1)$ 上↗；$(1,+\infty)$ 上↘，$\therefore F(x)$ 至多两个零点

令 $G(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}-b,G(x)$ 在 $(0,1)$ 上↗；$(1,+\infty)$ 上↘；$\therefore G(x)$ 至多两个零点.

令 $F(x)=G(x)\Rightarrow\dfrac{x}{e^{x-1}}-\dfrac{1+\ln x}{x}=0$，

当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right]$ 时，$\frac{x}{e^{x-1}}-\frac{1+\ln x}{x}>0$；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，由 $\frac{x}{e^{x}}=\frac{\ln ex}{ex}=\frac{\ln ex}{e^{\ln ex}}$ 且 $x>\ln ex>1$，

$\varphi(x)=\frac{x}{e^{x}}$ 在 $(1,+\infty)$ 上↘，$\therefore\varphi(x)<\varphi(\ln ex)$ 方程无解.

当 $x\in\left(\frac{1}{e},1\right]$ 时，由 $1\ge x\ge\ln ex,\varphi(x)=\frac{x}{e^{x}}$ 在 $(0,1]$ 上↗，

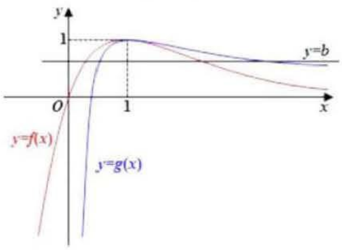
$\therefore\varphi(x)\ge\varphi(\ln ex)$ 方程有唯一解 $x=1$

当 $0<b<1$ 时，注意到 $F(0)=-b<0,F(1)=1-b>0$，

$$F\left(\frac{1}{b}+2\right)=\frac{\frac{1}{b}+2}{e^{\frac{1}{b}+1}}-b<\frac{\frac{1}{b}+2}{\left(\frac{1}{b}+1\right)^{2}}-b<0$$

$\therefore F(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $\left(1,\frac{1}{b}+2\right)$ 上各有一个零点 x_1,x_3

$f(x),g(x)$ 示意图



如下注意到 $G\left(\frac{1}{e}\right)=-b<0,G(1)=1-b>0,G\left(\frac{4}{b^{2}}\right)<0$，

$\therefore G(t)$ 在 $\left(\frac{1}{e},1\right)$ 和 $\left(1,\frac{4}{b^{2}}\right)$ 上各有一个零点 x_2,x_4.

且由 $f(x_1)=g(x_2)=\frac{x_1}{e^{x_1-1}}=\frac{\ln ex_2}{x_2}\Rightarrow\frac{x_1}{e^{x_1}}=\frac{\ln ex_2}{ex_2}=\frac{\ln ex_2}{e^{\ln ex_2}}$，而 $x_1,\ln ex_2\in(0,1)$，

而 $\varphi(x)=\frac{x}{e^{x}}$ 在 $(0,1)$ 上↗，由 $\varphi(x_1)=\varphi(\ln ex_2)\Rightarrow x_1=\ln ex_2\Rightarrow\therefore e^{x_1-1}=x_2$，

由 $f(x_3)=g(x_4)\Rightarrow\frac{x_3}{e^{x_3-1}}=\frac{1+\ln x_4}{x_4}\Rightarrow\frac{x_3}{e^{x_3}}=\frac{\ln e_4}{e^{\ln x_4}}$，而 $x_3,ex_4>1$

而 $\varphi(x)=\frac{x}{e^{x}}$ 在 $(1,+\infty)$ 上↘，由 $\varphi(x_3)=\varphi(\ln ex_4)\Rightarrow x_3=\ln x_4,\therefore e^{x_3-1}=x_4$，

$\therefore\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_3}{x_4}\Rightarrow x_1x_4=x_2x_3$，证毕!

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。