天津市耀华中学 2024 届高三年级第一次月考

数学学科试卷

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共 150 分.考试用时 120 分钟.

第I卷（选择题 共 45 分）

一、选择题：本大题共 9 小题，每小题 5 分，共 45 分，在每小题给出的四个选项中，有且只有一项是符合题目要求的，请把正确答案填涂在答题卡上.

1. 已知集合 $A=\left\{x\left|x^2+x-2<0\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|\lg x<1\right.\right\}$，$A\cap B=$（　　）

A. $(-2,10)$　　　　B. $(0,1)$

C. $(-2,1)$　　　　D. $(-\infty,10)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据解一元二次不等式的解法，结合对数函数的单调性、集合交集的定义进行求解即可.

【详解】因为 $A=\left\{x\left|x^2+x-2<0\right.\right\}=(-2,1)$，$B=\left\{x\left|\lg x<1\right.\right\}=(0,10)$，

所以 $A\cap B=(0,1)$，

故选：B

2. 设 $x\in\mathbf{R}$，则“$|x-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}$”是“$x^3<1$”的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【详解】分析：首先求解绝对值不等式，然后求解三次不等式即可确定两者之间的关系.

详解：绝对值不等式 $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}<x-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0<x<1$，

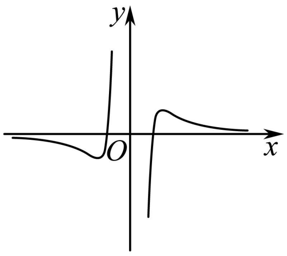
由 $x^3<1\Leftrightarrow x<1$.

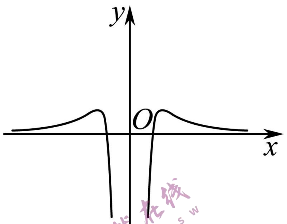
据此可知$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$是$x^3<1$的充分而不必要条件.

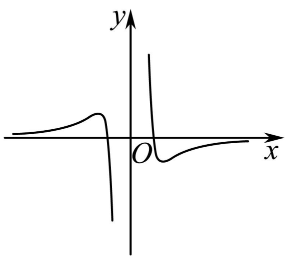
本题选择A选项.

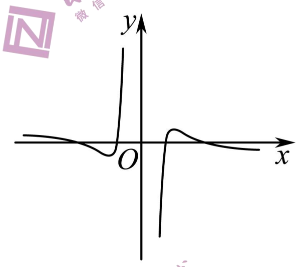
点睛：本题主要考查绝对值不等式的解法，充分不必要条件的判断等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

3. 函数$f\left(x\right)=\frac{\ln|x|}{x^3}$的部分图象是

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【解析】

【分析】根据奇偶性排除 B，当$x>1$时，$f\left(x\right)=\frac{\ln|x|}{x^3}>0$，排除 CD，得到答案.

【详解】$f\left(x\right)=\frac{\ln|x|}{x^3},f\left(-x\right)=\frac{\ln|x|}{-x^3}=-f\left(x\right)$，$f\left(x\right)$为奇函数，排除 B

当$x>1$时，$f\left(x\right)=\frac{\ln|x|}{x^3}>0$恒成立，排除 CD

故答案选 A

【点睛】本题考查了函数图像的判断，通过奇偶性，特殊值法排除选项是解题的关键.

4. 5G 技术在我国已经进入调整发展的阶段，5G 手机的销量也逐渐上升，某手机商城统计了最近 5 个月手机的实际销量，如下表所示：

时间x	1	2	3	4	5

销售量y（千只）	0.5	0.8	1.0	1.2	1.5

若x与y线性相关，且线性回归方程为$\hat{y}=0.24x+\hat{a}$，则下列说法不正确的是（　　）

A. 由题中数据可知，变量y与x正相关，且相关系数$r<1$

B. 线性回归方程$\hat{y}=0.24x+\hat{a}$中$\hat{a}=0.26$

C. 当解释变量x每增加1个单位时，预报变量$\hat{y}$平均增加0.24个单位

D. 可以预测$x=6$时，该商场5G手机销量约为1.72（千只）

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据已知数据，分析总体单调性，结合增量的变化判断A选项；根据已知数据得到样本中心点，代入回归方程求解即可判断B选项；根据回归方程判断CD选项.

【详解】从数据看y随x的增加而增加，故变量y与x正相关，由于各增量并不相等，故相关系数$r<1$，故A正确；

由已知数据得$\overline{x}=\frac{1}{5}(1+2+3+4+5)=3$，$\overline{y}=\frac{1}{5}(0.5+0.8+1.0+1.2+1.5)=1$，

代入$\hat{y}=0.24x+\hat{a}$中得到$\hat{a}=1-3\times0.24=0.28$，故B错；

根据线性回归方程$\hat{y}=0.24x+0.28$可得x每增加一个单位时，预报变量$\hat{y}$平均增加0.24个单位，故C正确.

将$x=6$代入$\hat{y}=0.24x+0.28$中得到$\hat{y}=0.24\times6+0.28=1.72$，故D正确.

故选：ACD.

5. 已知$a=\log_{0.2}0.5,b=0.5^{0.2},c=\log_{\frac{1}{2}}0.4$，则$a$，$b$，$c$的大小关系为（　　）

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

【答案】A

【解析】

【分析】由指数函数与对数函数的单调性求解即可

【详解】因为$a=\log_{0.2}0.5=\log_{0.2}\sqrt{0.25}<\log_{0.2}\sqrt{0.2}=\frac{1}{2}$，

而$b=0.5^{0.2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}}>\frac{1}{2}$，且$0.5^{0.2}<1$，

所以$a<b$.

又$c=\log_{\frac{1}{2}}0.4=\log_2\frac{5}{2}>\log_2 2>1$，

所以$a<b<c$，

故选：A.

6. 已知$a^{\log_4 a}=16\sqrt{2}$，则$a+\log_2 a=$（　　）

A. 11 或$-\frac{23}{8}$　　B. 11 或$-\frac{21}{8}$　　C. 12 或$-\frac{23}{8}$　　D. 10 或$-\frac{21}{8}$

【答案】A

【解析】

【分析】对$a^{\log_4 a}=16\sqrt{2}$两边同时取对数，可解得$\log_4 a=\frac{3}{2}$或$-\frac{3}{2}$，讨论$\log_4 a=\frac{3}{2}$或$-\frac{3}{2}$时$a+\log_2 a$的值，即可得出答案.

【详解】由$a^{\log_4 a}=16\sqrt{2}$，两边取对数得$\log_4\left(a^{\log_4 a}\right)=\log_4\left(16\sqrt{2}\right)\left(\log_4 a\right)^2=\log_{\left(\sqrt{2}\right)^4}\left(\sqrt{2}\right)^9=\frac{9}{4}$，所以

$\log_4 a=\frac{3}{2}$或$-\frac{3}{2}$.

当$\log_4 a=\frac{3}{2}$时，$a=4^{\frac{3}{2}}=2^3=8$，所以$a+\log_2 a=8+\log_2 8=11$；

当$\log_4 a=-\frac{3}{2}$时，$a=4^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{8}$，

所以$a+\log_2 a=\frac{1}{8}+\log_2\frac{1}{8}=-\frac{23}{8}$，

综上，$a+\log_2 a=11$或$-\frac{23}{8}$，

故选：A.

7. “送出一本书，共圆读书梦”，某校组织为偏远乡村小学送书籍的志愿活动，运送的卡车共装有 10 个纸箱，其中 5 箱英语书、2 箱数学书、3 箱语文书．到目的地时发现丢失一箱，但不知丢失哪一箱．现从剩下 9 箱中任意打开 2 箱都是英语书的概率为（　　）

A. $\frac{2}{9}$　　B. $\frac{1}{8}$　　C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{5}{8}$

【答案】A

【解析】

【分析】剩下 9 箱中任意打开 2 箱都是英语书的情况整体分为三种情况：丢失的英语书、数学书和语文书，计算出每种情况的概率即可.

【详解】设事件A表示丢失一箱后任取两箱是英语书，事件B_k表示丢失的一箱为$k,k=1,2,3$分别表示英语

书、数学书、语文书. 由全概率公式得 $P(A)=\sum_{k=1}^{3}P(B_k)P(A|B_k)=\frac{1}{2}\times\frac{C_4^2}{C_9^2}+\frac{1}{5}\times\frac{C_5^2}{C_9^2}+\frac{3}{10}\times\frac{C_5^2}{C_9^2}=\frac{8}{C_9^2}=\frac{2}{9}$.

故选：A

8. 将函数 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像上所有点横坐标变为原来的 2 倍，纵坐标不变，得到函数 $g(x)$ 的图像，有下述四个结论：

①$g(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

②函数 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增

③点 $\left(\frac{4\pi}{3},0\right)$ 是函数 $g(x)$ 图像的一个对称中心

④当 $x\in\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，函数 $g(x)$ 的最大值为 2

其中所有正确结论的编号是（　　）

A. ①②③　　B. ②③　　C. ①③④　　D. ②④

【答案】B

【解析】

【分析】根据图象变换可得 $g(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，结合正弦函数的性质逐项分析判断.

【详解】由题意可得：$g(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，故①错误；

因为 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $x-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$，且 $y=\sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，

所以函数 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，故②正确；

因为 $g\left(\frac{4\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\pi=0$，

所以点 $\left(\frac{4\pi}{3},0\right)$ 是函数 $g(x)$ 图像的一个对称中心，故③正确；

因为 $x\in\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right]$，则 $x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{4\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$，

所以当 $x-\frac{\pi}{3}=-\frac{4\pi}{3}$，即 $x=-\pi$ 时，函数 $g(x)$ 的最大值为 $g(-\pi)=2\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$，故④错误；

故选：B.

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(a-1)x^2+(a+2)x-1, x\in(-1,1)\\(a-1)x^2+ax+|x|, x\notin(-1,1)\end{cases}$ 有且只有 3 个零点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(0,1)$　　　　B. $(-\infty,-8)\cup(0,1)$

C. $[0,1)$　　　　D. $(-\infty,-8]\cup[0,1)$

【答案】B

【解析】

【分析】先求 $a=1$ 时函数 $f(x)$ 的零点，再考虑 $a\neq1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]\cup[1,+\infty)$ 的零点，由此确定函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上的零点个数，结合二次函数性质求 a 的取值范围.

【详解】当 $a=1$ 时，$f(x)=\begin{cases}3x-1, x\in(-1,1)\\x+x, x\in[1,+\infty)\\0, x\in(-\infty,-1]\end{cases}$，

所以区间 $(-\infty,-1]$ 内的任意实数和 $\frac{1}{3}$ 都为函数 $f(x)$ 的零点，不满足要求；

当 $a\neq1$ 时，

若 $x\in(-\infty,-1]$，则 $f(x)=(a-1)x^2+ax-x$，

令 $f(x)=0$，可得 $x=0$（舍去），或 $x=-1$，

所以 $x=-1$ 为函数 $f(x)$ 的一个零点；

若 $x\in[1,+\infty)$，则 $f(x)=(a-1)x^2+ax+x$，

令 $f(x)=0$，则 $(a-1)x^2+ax+x=0$，

所以 $x=\frac{a+1}{a-1}$，

若 $\frac{a+1}{1-a}\geq1$，即 $0\leq a<1$，则函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有一个零点；

若 $a>1$ 或 $a<0$ 时，则函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上没有零点；

当 $0\leq a<1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ 上有两个零点；

当 $a>1$ 或 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ 上有一个零点，

因为当 $0\le a<1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ 上有两个零点；

又函数 $f(x)$ 在 R 上有 3 个零点，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有且只有一个零点，

即方程 $(a-1)x^2+(a+2)x-1=0$ 在 $(-1,1)$ 上有一个根，

由 $\Delta=(a+2)^2+4(a-1)=a(a+8)$，

当 $a=0$ 时，方程 $(a-1)x^2+(a+2)x-1=0$ 的根为 $x=1$ (舍去)，

故 $a=0$ 时，方程 $(a-1)x^2+(a+2)x-1=0$ 在 $(-1,1)$ 上没有根，矛盾

当 $0<a<1$ 时，$\Delta>0$，

设 $g(x)=(a-1)x^2+(a+2)x-1, x\in[-1,1]$，

函数 $g(x)=(a-1)x^2+(a+2)x-1$ 的对称轴为 $x=\dfrac{a+2}{2-2a}>1$，

函数 $g(x)$ 的图象为开口向下的抛物线，

由方程 $(a-1)x^2+(a+2)x-1=0$ 在 $(-1,1)$ 上有一个根可得 $g(1)>0, g(-1)<0$，

所以 $(a-1)+(a+2)-1>0, (a-1)-(a+2)-1<0$，

所以 $0<a<1$，

当 $a>1$ 时，则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ 上有一个零点；

又函数 $f(x)$ 在 R 上有 3 个零点，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有且只有两个零点，

即方程 $(a-1)x^2+(a+2)x-1=0$ 在 $(-1,1)$ 上有两个根，

由 $g(x)=(a-1)x^2+(a+2)x-1, x\in[-1,1]$ 可得函数 $g(x)$ 的图象为开口向上的抛物线，

函数 $g(x)=(a-1)x^2+(a+2)x-1$ 的对称轴为 $x=\dfrac{a+2}{2-2a}$，

则 $\Delta=(a+2)^2+4(a-1)=a(a+8)>0$，$-1<\dfrac{a+2}{2-2a}<1$，　$g(1)>0, g(-1)>0$，

所以 $a>4$，$(a-1)+(a+2)-1>0, (a-1)-(a+2)-1>0$，

满足条件的 a 不存在，

当 $a<0$ 时，则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ 上有一个零点；

又函数 $f(x)$ 在 R 上有 3 个零点，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有且只有两个零点，

即方程 $(a-1)x^2+(a+2)x-1=0$ 在 $(-1,1)$ 上有两个根，

由 $g(x)=(a-1)x^2+(a+2)x-1, x\in[-1,1]$ 可得函数 $g(x)$ 的图象为开口向下的抛物线，

函数 $g(x)=(a-1)x^2+(a+2)x-1$ 的对称轴为 $x=\dfrac{a+2}{2-2a}$，

则 $\Delta=(a+2)^2+4(a-1)=a(a+8)>0$，$-1<\dfrac{a+2}{2-2a}<1$，　$g(1)<0, g(-1)<0$，

所以 $a<-8$，$a<0$，$(a-1)+(a+2)-1<0, (a-1)-(a+2)-1<0$，

所以 $a<-8$，

故实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-8)\cup(0,1)$.

故选：B

【点睛】关键点睛：含绝对值函数的相关问题的解决的关键在于去绝对值，将其转化为不含绝对值的函数，分段函数的性质的研究可以分段研究.

第II卷（非选择题 共 105 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分，请将答案填写在答题卡上.

10. 复数 $z=\dfrac{(1-i)^2}{1+i}$（i 为虚数单位），则 $|z|=$______.

【答案】$\sqrt{2}$

【解析】

【分析】先利用复数的运算化简复数，再利用模长的公式求解模长.

【详解】$z=\dfrac{(1-i)^2}{1+i}=\dfrac{-2i}{1+i}=\dfrac{-2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=-i(1-i)=-1-i$.

所以 $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

故答案为：$\sqrt{2}$

11. 在 $(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}})^6$ 的二项展开式中，x^2 的系数为__________.

【答案】$-\frac{3}{8}$

【解析】

【详解】试题分析：因为$T_{r+1}=C_6^r(\frac{\sqrt{x}}{2})^{6-r}(-\frac{2}{\sqrt{x}})^r=C_6^r(-1)^r 2^{2r-6}x^{3-r}$，所以由$3-r=2$得$r=1$，因此$x^2$的系数为$C_6^1(-1)2^{-4}=-\frac{3}{8}$

考点：二项式定理

【方法点睛】

1．求特定项系数问题可以分两步完成：第一步是根据所给出的条件（特定项）和通项公式，建立方程来确定指数（求解时要注意二项式系数中 n 和 r 的隐含条件，即 n，r 均为非负整数，且 n≥r)；第二步是根据所求的指数，再求所求解的项的系数．

2．有理项是字母指数为整数的项．解此类问题必须合并通项公式中同一字母的指数，根据具体要求，令其为整数，再根据数的整除性来求解．

12. 若$2\sin\alpha+\sin\beta=\sqrt{5}$，$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{2}$，则$\sin\alpha=$________；$\cos 2\beta=$________.

【答案】 ①. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ##$\frac{2}{5}\sqrt{5}$ ②. $\frac{3}{5}$ ##0.6

【解析】

【分析】由$2\sin\alpha+\sin\beta=\sqrt{5}$，$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{2}$，可得出$2\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{5}$，再结合同角平方关系即可求出$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，从而算出$\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，再由二倍角公式求出$\cos 2\beta=\frac{3}{5}$.

【详解】$\because$ $2\sin\alpha+\sin\beta=\sqrt{5}$，$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{2}$，

$\therefore 2\sin\alpha+\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\sqrt{5}$ 即 $2\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{5}$，

$\therefore \cos\alpha=2\sin\alpha-\sqrt{5}$，

又$\because \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

$\therefore \sin^2\alpha+\left(2\sin\alpha-\sqrt{5}\right)^2=1,$ 解得 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore 2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}+\sin\beta=\sqrt{5}$，解得 $\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \cos 2\beta=1-2\sin^2\beta=\frac{3}{5}$.

综上，$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$、$\cos2\beta=\frac{3}{5}$.

故答案为：$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\frac{3}{5}$.

13. 某专业资格考试包含甲、乙、丙 3 个科目，假设小张甲科目合格的概率为$\frac{3}{4}$，乙、丙科目合格的概率均为$\frac{2}{3}$，且 3 个科目是否合格相互独立.设小张 3 科中合格的科目数为 X，则 $P(X=2)=$__________；$E(X)=$__________.

【答案】 ①. $\frac{4}{9}$； ②. $\frac{25}{12}$##$2\frac{1}{12}$.

【解析】

【分析】根据独立事件概率的公式，结合数学期望的公式进行求解即可.

【详解】$P(X=2)=(1-\frac{3}{4})\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times(1-\frac{2}{3})\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times(1-\frac{2}{3})=\frac{4}{9}$；

$P(X=0)=(1-\frac{3}{4})\times(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{2}{3})=\frac{1}{36}$，

$P(X=1)=\frac{3}{4}\times(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{2}{3})+(1-\frac{3}{4})\times\frac{2}{3}\times(1-\frac{2}{3})+(1-\frac{3}{4})\times(1-\frac{2}{3})\times\frac{2}{3}=\frac{7}{36}$，

$P(X=3)=\frac{3}{4})\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{36}+1\times\frac{7}{36}+2\times\frac{4}{9}+3\times\frac{1}{3}=\frac{25}{12}$，

故答案为：$\frac{4}{9}$；$\frac{25}{12}$

14. 已知 $a>0$，$b>0$，则 $\frac{\sqrt{a(a+b)}}{3a+b}$ 的最大值为________.

【答案】$\frac{\sqrt{2}}{4}$##$\frac{1}{4}\sqrt{2}$

【解析】

【分析】利用基本不等式可得答案.

【详解】因为 $a>0$，$b>0$，所以

$$\frac{\sqrt{a(a+b)}}{3a+b}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2a(a+b)}}{2a+b+a}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\frac{2a+(a+b)}{2}}{2a+b+a}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

当且仅当 $2a=a+b$ 即 $a=b$ 等号成立.

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{4}$.

15. 设 $\omega \in \mathrm{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right), x\geq 0,\\ \dfrac{3}{2}x^2+4\omega x+\dfrac{1}{2}, x<0,\end{cases}$ $g(x)=\omega x$.若 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，且函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有三个交点，则 ω 的取值范围是________.

【答案】$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2}{3}\right]$.

【解析】

【分析】利用 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增可得 $\dfrac{1}{4}\leq\omega\leq\dfrac{2}{3}$，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有三个交点，可转化为方程 $3x^2+6\omega x+1=0$ 在 $x\in(-\infty,0)$ 上有两个不同的实数根可得答案.

【详解】当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$\omega x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi\omega}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

因为 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

所以 $\begin{cases}\dfrac{\pi(0)}{2}+\dfrac{\pi}{6}\leq\dfrac{\pi}{2}\\ -\dfrac{4\omega}{3}\leq-\dfrac{1}{3}\\ 2\sin\dfrac{\pi}{6}\geq\dfrac{1}{2}\end{cases}$，解得 $\dfrac{1}{4}\leq\omega\leq\dfrac{2}{3}$，

又函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有三个交点，

所以在 $x\in(-\infty,0)$ 上函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有两个交点，

即方程 $\dfrac{3}{2}x^2+4\omega x+\dfrac{1}{2}=\omega x$ 在 $x\in(-\infty,0)$ 上有两个不同的实数根，

即方程 $3x^2+6\omega x+1=0$ 在 $x\in(-\infty,0)$ 上有两个不同的实数根，

所以 $\begin{cases}\Delta=36\omega^2-12>0\\ -\omega<0\\ \dfrac{3}{2}\times0^2+6\omega\times0+1>0\end{cases}$，解得 $\omega>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

当 $x\geq 0$ 时，令 $f(x)-g(x)=2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)-\omega x$，

由 $x=0$ 时，$f\left(x\right)-g\left(x\right)=1>0$，

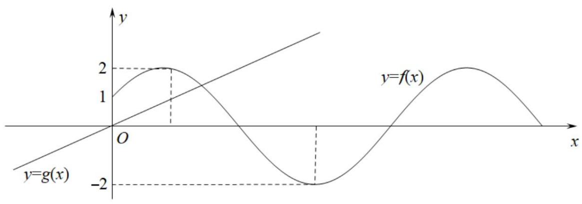
当 $\omega x+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$ 时，$\omega x=\frac{7\pi}{3}$，

此时，$f\left(x\right)-g\left(x\right)=2-\frac{7\pi}{3}<0$，

结合图象，所以 $x\geq 0$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 与 $g\left(x\right)$ 的图象只有一个交点，

综上所述，$\omega\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3}\right]$.

故答案为：$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3}\right]$.



【点睛】关键点点睛：解题的关键点是转化为方程 $3x^2+6\omega x+1=0$ 在 $x\in\left(-\infty,0\right)$ 上有两个不同的实数根.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 75 分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤，请把解题过程写在答案卡上.

16. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，满足 $2c=\sqrt{3}a+2b\cos A$.

（1）求角 B；

（2）若 $\cos A=\frac{1}{4}$，求 $\sin(2A+B)$ 的值；

（3）若 $c=7$，$b\sin A=\sqrt{3}$，求 b 的值.

【答案】（1）$\frac{\pi}{6}$.（2）$\frac{3\sqrt{5}-7}{16}$.（3）$\sqrt{19}$

【解析】

【分析】

（1）由正弦定理化边为角后，由诱导公式和两角和的正弦公式化简后可求得 B；

（2）由二倍角公式求得 $\sin 2A,\cos 2A$ 后再由两角和的正弦公式可求值；

（3）由正弦定理求得 a，再由余弦定理求得 b.

【详解】（1）$\because 2c=\sqrt{3}a+2b\cos A$，

由正弦定理得，$2\sin C=\sqrt{3}\sin A+2\sin B\cos A$

$\therefore 2(\sin A\cos B+\cos A\sin B)=\sqrt{3}\sin A+2\sin B\cos A$，

即 $2\sin A\cos B=\sqrt{3}\sin A$．

$\because \sin A\neq 0$，

$\therefore \cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

又 $0<B<\pi$，

$\therefore B=\dfrac{\pi}{6}$

（2）由已知得，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$\therefore \sin 2A=2\sin A\cos A=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，

$\cos 2A=2\cos^2 A-1=-\dfrac{7}{8}$

$\therefore \sin(2A+B)=\sin(2A+\dfrac{\pi}{6})=\sin 2A\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos 2A\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3\sqrt{5}-7}{16}$．

（3）由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得 $a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}$．

由（1）知，$B=\dfrac{\pi}{6}$，

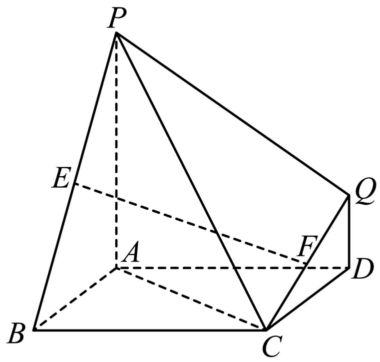
$\therefore a=2\sqrt{3}$

由余弦定理得，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=19$．

$\therefore b=\sqrt{19}$

【点睛】本题考查正弦定理、余弦定理、考查两角和的正弦公式、二倍角公式、诱导公式，同角间的三角函数关系，考查公式较多，解题关键是正确选择应用公式的顺序．在三角形中出现边角关系时，常常用正弦定理进行边角转换．

17. 已知底面 $ABCD$ 是正方形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA//DQ$，$PA=AD=3DQ=3$，点 E、F 分别为线段 PB、CQ 的中点．



（1）求证：$EF//$平面$PADQ$；

（2）求平面PCQ与平面CDQ夹角的余弦值；

（3）线段PC上是否存在点M，使得直线AM与平面PCQ所成角的正弦值是$\frac{\sqrt{42}}{7}$，若存在求出$\frac{PM}{MC}$的值，若不存在，说明理由.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{\sqrt{14}}{7}$

（3）存在；$\frac{PM}{MC}=1$或$\frac{PM}{MC}=\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】（1）法一：分别取AB、CD的中点G、H，连接EG、GH、FH，证明出平面$EGHF//$平面$ADQP$，利用面面平行的性质可证得结论成立；

法二：以点A为坐标原点，以AB、AD、AP所在直线分别为x、y、z轴建立空间直角坐标系，利用空间向量法可证得结论成立；

（2）利用空间向量法可求得平面PCQ与平面CDQ夹角的余弦值；

（3）假设存在点M，使得$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$，其中$\lambda\in[0,1]$，求出向量$\overrightarrow{AM}$的坐标，利用空间向量法可得出关于$\lambda$的方程，解之即可.

【小问1详解】

证明：法一：分别取AB、CD的中点G、H，连接EG、GH、FH，

由题意可知点E、F分别为线段PB、CQ的中点．所以$EG//PA$，$FH//QD$，

因为$PA//DQ$，所以$EG//FH$，所以点E、G、H、F四点共面，

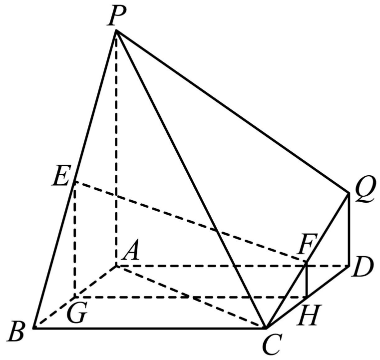
因为G、H分别为AB、CD的中点，所以$GH//AD$，

因为$AD\subset$平面$ADQP$，$GH\not\subset$平面$ADQP$，所以$GH//$平面$ADQP$，

又因为$FH//QD$，$QD\subset$平面$ADQP$，$FH\not\subset$平面$ADQP$，所以$FH//$平面$ADQP$，

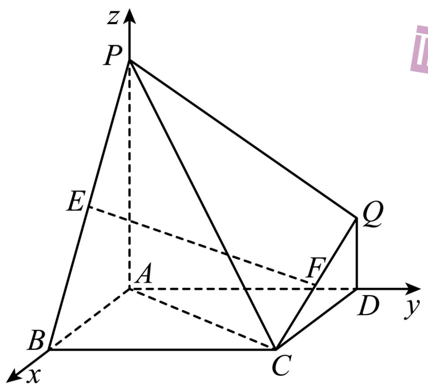
又因为$FH\cap GH=H$，FH、GH Ì 平面$EGHF$，所以平面$EGHF//$平面$ADQP$，

因为$EF\subset$平面$EGHF$，所以$EF//$平面$ADQP$；



法二：因为$ABCD$为正方形，且$PA\perp$平面$ABCD$，所以AP、AB、AD两两互相垂直，

以点A为坐标原点，以AB、AD、AP所在直线分别为x、y、z轴建立如下图所示的空间直角坐标系，



则$P(0,0,3)$、$C(3,3,0)$、$Q(0,3,1)$、$B(3,0,0)$、$E\left(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}\right)$、$F\left(\frac{3}{2},3,\frac{1}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{EF}=(0,3,-1)$，易知平面$PADQ$的一个法向量$\vec{a}=(1,0,0)$，

所以$\vec{a}\cdot\overrightarrow{EF}=0$，所以$\overrightarrow{EF}\perp\vec{a}$，

又因为$EF\not\subset$平面$ADQP$，所以$EF//$平面$ADQP$.

【小问2详解】

解：设平面PCQ的法向量$\vec{m}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{PC}=(3,3,-3)$，$\overrightarrow{CQ}=(-3,0,1)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PC}=3x+3y-3z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CQ}=-3x+z=0\end{cases}$，取$x=1$，可得$\vec{m}=(1,2,3)$，

所以平面 PCQ 的一个法向量为 $\overrightarrow{m}=(1,2,3)$，

易知平面 CQD 的一个法向量 $\vec{n}=(0,1,0)$，设平面 PCQ 与平面 CQD 夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{m},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{m}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{2}{1\times\sqrt{1+4+9}}=\dfrac{2}{\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{14}}{7}$，

所以平面 PCQ 与平面 CQD 夹角余弦值为 $\dfrac{\sqrt{14}}{7}$；

【小问 3 详解】

解：假设存在点 M，使得 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}=(3\lambda,3\lambda,-3\lambda)$，其中 $\lambda\in[0,1]$，

则 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}=(0,0,3)+(3\lambda,3\lambda,-3\lambda)=(3\lambda,3\lambda,3-3\lambda)$，

由（2）得平面 PCQ 的一个法向量为 $\overrightarrow{m}=(1,2,3)$，

由题意可得 $\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{m}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{m}\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{m}\right|}=\dfrac{|3\lambda+6\lambda+9-9\lambda|}{\sqrt{14}\sqrt{9\lambda^2+9\lambda^2+(3-3\lambda)^2}}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，

整理可得 $12\lambda^2-8\lambda+1=0$．即 $(2\lambda-1)(6\lambda-1)=0$，

因为 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{6}$ 或 $\frac{1}{2}$，所以，$\dfrac{PM}{MC}=\dfrac{1}{5}$ 或 $\dfrac{PM}{MC}=1$．

18. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$b_n=\begin{cases}a_n-6, n\text{为奇数}\\2a_n, n\text{为偶数}\end{cases}$，记 S_n，T_n 分别为数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和，$S_4=32$，$T_3=16$．

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）证明：当 $n>5$ 时，$T_n>S_n$．

【答案】（1）$a_n=2n+3$；

（2）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，用 a_1,d 表示 S_n 及 T_n，即可求解作答.

（2）方法 1，利用（1）的结论求出 S_n，b_n，再分奇偶结合分组求和法求出 T_n，并与 S_n 作差比较作答；方法 2，利用（1）的结论求出 S_n，b_n，再分奇偶借助等差数列前 n 项和公式求出 T_n，并与 S_n 作差比较作答.

【小问 1 详解】

设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，而$b_n=\begin{cases}a_n-6,n=2k-1\\2a_n,n=2k\end{cases},k\in\mathrm{N}^*$，

则$b_1=a_1-6,b_2=2a_2=2a_1+2d,b_3=a_3-6=a_1+2d-6$，

于是$\begin{cases}S_4=4a_1+6d=32\\T_3=4a_1+4d-12=16\end{cases}$，解得$a_1=5,d=2$，$a_n=a_1+(n-1)d=2n+3$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=2n+3$.

【小问 2 详解】

方法 1：由（1）知，$S_n=\dfrac{n(5+2n+3)}{2}=n^2+4n$，$b_n=\begin{cases}2n-3,n=2k-1\\4n+6,n=2k\end{cases},k\in\mathrm{N}^*$，

当n为偶数时，$b_{n-1}+b_n=2(n-1)-3+4n+6=6n+1$，

$T_n=\dfrac{13+(6n+1)}{2}\cdot\dfrac{n}{2}=\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{7}{2}n$，

当$n>5$时，$T_n-S_n=(\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{7}{2}n)-(n^2+4n)=\dfrac{1}{2}n(n-1)>0$，因此$T_n>S_n$，

当n为奇数时，$T_n=T_{n+1}-b_{n+1}=\dfrac{3}{2}(n+1)^2+\dfrac{7}{2}(n+1)-[4(n+1)+6]=\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{5}{2}n-5$，

当$n>5$时，$T_n-S_n=(\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{5}{2}n-5)-(n^2+4n)=\dfrac{1}{2}(n+2)(n-5)>0$，因此$T_n>S_n$，

所以当$n>5$时，$T_n>S_n$.

方法 2：由（1）知，$S_n=\dfrac{n(5+2n+3)}{2}=n^2+4n$，$b_n=\begin{cases}2n-3,n=2k-1\\4n+6,n=2k\end{cases},k\in\mathrm{N}^*$，

当n为偶数时，$T_n=(b_1+b_3+\cdots+b_{n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_n)=\dfrac{-1+2(n-1)-3}{2}\cdot\dfrac{n}{2}+\dfrac{14+4n+6}{2}\cdot\dfrac{n}{2}=\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{7}{2}n$，

当$n>5$时，$T_n-S_n=(\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{7}{2}n)-(n^2+4n)=\dfrac{1}{2}n(n-1)>0$，因此$T_n>S_n$，

当n为奇数时，若$n\geq 3$，则

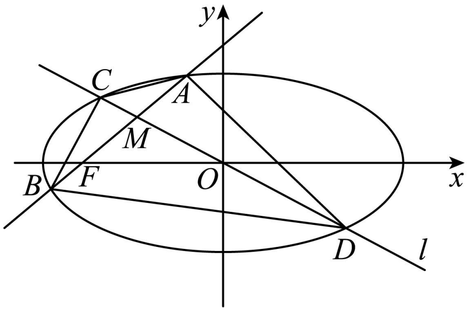
$T_n=(b_1+b_3+\cdots+b_n)+(b_2+b_4+\cdots+b_{n-1})=\dfrac{-1+2n-3}{2}\cdot\dfrac{n+1}{2}+\dfrac{14+4(n-1)+6}{2}\cdot\dfrac{n-1}{2}$

$=\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{5}{2}n-5$，显然$T_1=b_1=-1$满足上式，因此当$n$为奇数时，$T_n=\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{5}{2}n-5$，

当$n>5$时，$T_n-S_n=(\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{5}{2}n-5)-(n^2+4n)=\dfrac{1}{2}(n+2)(n-5)>0$，因此$T_n>S_n$，

所以当$n>5$时，$T_n>S_n$.

19. 如图，已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，过左焦点 $F\left(-\sqrt{3},0\right)$ 且斜率为 k 的直线交椭圆 E 于 A,B 两点，线段 AB 的中点为 M，直线 l：$x+4ky=0$ 交椭圆 E 于 C,D 两点.



（1）求椭圆 E 的方程；

（2）求证：点 M 在直线 l 上；

（3）是否存在实数 k，使得 $S_{\Delta BDM}=3S_{\Delta ACM}$？若存在，求出 k 的值，若不存在，说明理由.

【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ （2）详见解析 （3）存在，且 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$

【解析】

【分析】（1）根据离心率和焦点坐标列方程组，解方程组求得 a,b 的值，进而求得椭圆 E 的方程.（2）写出直线 AB 的方程，联立直线的方程和椭圆的方程，求得中点 M 的坐标，将坐标代入直线 l 的方程，满足方程，由此证得点 M 在直线 l 上.（3）由（2）知 A,B 到 l 的距离相等，根据两个三角形面积的关系，得到 M 是 OC 的中点，设出 C 点的坐标，联立直线 l 的方程和椭圆的方程，求得 C 点的坐标，并由此求得 k 的值.

【详解】解：（1）解：由 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ c=\sqrt{3}\end{cases}$，解得 $a=2$，$b=1$

所以所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

（2）设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，$M\left(x_0,y_0\right)$，

$\begin{cases}y=k\left(x+\sqrt{3}\right)\\ x^2+4y^2=4\end{cases}$，消 x 得，$\left(4k^2+1\right)x^2-8\sqrt{3}k^2x+12k^2-4=0$，

解得 $\begin{cases}x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-4\sqrt{3}k^2}{1+4k^2}\\ y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{\sqrt{3}k}{1+4k^2}\end{cases}$

将$M\left(x_0,y_0\right)$代入到$x+4ky=0$中，满足方程

所以点M在直线l上.

（3）由（2）知A,B到l的距离相等，

若ΔBDM的面积是ΔACM面积的3倍，得$\left|DM\right|=3\left|CM\right|$，

有$\left|DO\right|=\left|CO\right|$，

$\therefore M$是OC的中点，

设$C\left(x_3,y_3\right)$，则$y_0=\dfrac{y_3}{2}$，

联立$\begin{cases}x+4ky=0\\x^2+4y^2=4\end{cases}$，解得$y_3=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+4k^2}}$，

于是$\dfrac{1}{2\sqrt{1+4k^2}}=\dfrac{\sqrt{3}\left|k\right|}{1+4k^2}$

解得$k^2=\dfrac{1}{8}$，所以$k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

【点睛】本小题主要考查椭圆标准方程的求法，考查直线和椭圆的位置关系，考查根与系数关系，考查方程的思想，属于中档题.要证明一个点在某条直线上，那么先求得这个点的坐标，然后将点的坐标代入直线方程，如果方程成立，则这个点在直线上，否则不在这条直线上.

20. 已知函数$f\left(x\right)=\left(x-2\right)e^{x-1}-\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{1}{2}$，$g\left(x\right)=ax^2-x+4a\cos x+\ln\left(x+1\right)$，其中$a\in\mathbf{R}$.

（1）讨论函数$f\left(x\right)$的单调性，并求不等式$f\left(x\right)>0$的解集；

（2）用$\max\left\{m,n\right\}$表示m，n的最大值，记$F\left(x\right)=\max\left\{f\left(x\right),g\left(x\right)\right\}$，讨论函数$F\left(x\right)$的零点个数.

【答案】（1）增函数；$\left(1,+\infty\right)$；（2）答案见解析.

【解析】

【分析】

（1）先对函数求导，得到$f'\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(e^{x-1}-1\right)$，根据导数的方法，即可判定其单调性，进而可求出不等式的解集.

（2）$x>1$时，$F\left(x\right)>0$恒成立，当$-1<x<1$时，$f\left(x\right)<0$恒成立，故$F\left(x\right)$的零点即为函数$g\left(x\right)$的零点，讨论$g\left(x\right)$在$-1<x<1$的零点个数得到答案.

【详解】（1） $f'(x)=(x-1)e^{x-1}-x+1=(x-1)\left(e^{x-1}-1\right)$，

当 $x>1$ 时， $x-1>0$， $e^{x-1}-1>0$， $\therefore f'(x)>0$，

当 $x<1$ 时， $x-1<0$， $e^{x-1}-1<0$， $\therefore f'(x)>0$，

当 $x=1$ 时， $f'(x)=0$，

所以当 $x\in\mathbf{R}$ 时， $f'(x)\geq 0$，即 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上是增函数；

又 $f(1)=0$，所以 $f(x)>0$ 的解集为 $(1,+\infty)$.

（2））函数 $F(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$

由（1）得，函数 $f(x)$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 单调递增， $f(1)=0$

当 $x>1$ 时， $f(x)>0$，又 $F(x)=\max\{f(x),g(x)\}$，

所以 $x>1$ 时， $F(x)>0$ 恒成立，即 $x>1$ 时， $F(x)=0$ 无零点.

当 $-1<x<1$ 时， $f(x)<0$ 恒成立，所以 $F(x)$ 的零点即为函数 $g(x)$ 的零点

下面讨论函数 $g(x)$ 在 $-1<x<1$ 的零点个数：

$g'(x)=2ax-1-4a\sin x+\dfrac{1}{x+1}$，所以 $g''(x)=2a-4a\cos x-\dfrac{1}{(x+1)^2}(-1<x<1)$

①当 $a>0$ 时，因为 $-1<x<1$， $\cos x\in(\cos 1,1)$

又函数 $y=\cos x$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 递减，所以 $\cos 1>\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$

即当 $-1<x<1$ 时， $1-2\cos x<0$， $g''(x)=2a(1-2\cos x)-\dfrac{1}{(x+1)^2}<0$

所以 $g'(x)$ 单调递减，由 $g'(0)=0$ 得：当 $-1<x<0$ 时 $g'(x)>0$， $g(x)$ 递增

当 $0<x<1$ 时 $g'(x)<0$， $g(x)$ 递减

当 $x\to-1$ 时 $\ln(x+1)\to-\infty$， $\therefore g(x)\to-\infty$，当 $x=0$ 时 $g(0)=4a>0$

又 $g(1)=a-1+4a\cos 1+\ln 2$， $f(1)=0$

当 $g(1)>0\Rightarrow a>\dfrac{1-\ln 2}{1+4\cos 1}$ 时，函数 $F(x)$ 有 1 个零点；

当 $g(1)=0\Rightarrow a=\dfrac{1-\ln 2}{1+4\cos 1}$ 时，函数 $F(x)$ 有 2 个零点；

当 $g(1)<0 \Rightarrow 0<a<\dfrac{1-\ln 2}{1+4\cos 1}$ 时，函数 $F\left(x\right)$ 有 3 个零点；

②当 $a=0$ 时，$g(x)=\ln(x+1)-x$，由①得：当 $-1<x<0$ 时，$g'\left(x\right)>0$，$g\left(x\right)$ 递增，

当 $0<x<1$ 时，$g'\left(x\right)<0$，$g\left(x\right)$ 递减，所以 $g(x)_{\max}=g(0)=0$，$g(1)=\ln 2-1<0$，

所以当 $a=0$ 时函数 $F\left(x\right)$ 有 2 个零点

③当 $a<0$ 时，$g(x)=a\left(x^2+4\cos x\right)-x+\ln(x+1)$

$a\left(x^2+4\cos x\right)<0$，$-x+\ln(x+1)\le 0$，即 $g\left(x\right)<0$ 成立，由 $f\left(1\right)=0$，

所以当 $a<0$ 时函数 $F\left(x\right)$ 有 1 个零点

综上所述：当 $a>\dfrac{1-\ln 2}{1+4\cos 1}$ 或 $a<0$ 时，函数 $F\left(x\right)$ 有 1 个零点；

当 $a=\dfrac{1-\ln 2}{1+4\cos 1}$ 或 $a=0$ 时，函数 $F\left(x\right)$ 有 2 个零点；

当 $0<a<\dfrac{1-\ln 2}{1+4\cos 1}$ 时，函数 $F\left(x\right)$ 有 3 个零点.

【点睛】思路点睛：

导数的方法研究函数的零点时，通常需要对函数求导，根据导数的方法研究函数单调性，极值或最值等，有时需要借助数形结合的方法求解.