

东北育才学校科学高中部 2023 年高考模拟考试数学科试题

命题人：高三数学组

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知 P, Q 为 R 的两个非空真子集，若 $\complement_R Q \subseteq \complement_R P$ ，则下列结论正确的是（ ）

A. $\forall x \in Q, x \in P$

B. $\exists x_0 \in \complement_R P, x_0 \in \complement_R Q$

C. $\exists x_0 \notin Q, x_0 \in P$

D. $\forall x \in \complement_R P, x \in \complement_R Q$

2. 已知复数 z 满足 $(1+2i)z = i^{2023}$ ，则 $|\overline{z}| =$ （ ）

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. 已知随机变量 X, Y 分别满足 $X \sim B(8, p)$, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，且期望 $E(X) = E(Y)$ ，又 $P(Y \geq 3) = \frac{1}{2}$ ，则 $p =$ （ ）

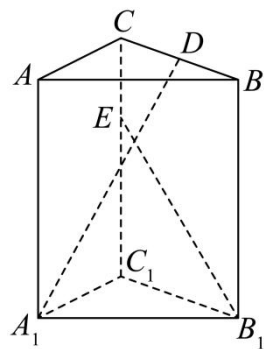
A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{5}{8}$

4. 如图，在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $2BB_1 = 3AB$ ， D 是棱 BC 的中点， E 在棱 CC_1 上，且 $CC_1 = 3CE$ ，则异面直线 A_1D 与 B_1E 所成角的余弦值是（ ）



A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. 若等比数列的前 n 项，前 $2n$ 项，前 $3n$ 项的和分别为 A, B, C ，则（ ）

A. $A + B = C$

B. $B^2 = AC$

C. $A^2 + B^2 = C(A + B)$

D. $A(C - A) = B(B - A)$

6. 设函数 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{2\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$)，已知 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有且仅有 4 个零点，则下列说法错误的是

()

A. ω 的取值范围是 $\left[\frac{19}{6}, \frac{25}{6}\right)$

B. $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = 1$ 在 $(0, \pi)$ 上的交点恰有 2 个

C. $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = -1$ 在 $(0, \pi)$ 上的交点可能有 2 个

D. $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ ，若 $f(2x+1)-1$ 为奇函数， $f\left(\frac{3}{2}x+2\right)$ 为偶函数， $f(0)=3$ ，则下列

结论一定正确的是 ()

A. 函数 $f(x)$ 的周期为 3

B. $f(-1) = -1$

C. $f(2023) = 0$

D. $f(2022) = -1$

8. 已知圆 $C_1: (x+3)^2 + y^2 = a^2 (a > 7)$ 和 $C_2: (x-3)^2 + y^2 = 1$ ，动圆 M 与圆 C_1 ，圆 C_2 均相切， P 是 $\triangle MC_1C_2$ 的内心，且 $S_{\triangle PMC_1} + S_{\triangle PMC_2} = 3S_{\triangle PC_1C_2}$ ，则 a 的值为 ()

A. 9

B. 11

C. 17 或 19

D. 19

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分

9. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别 a, b, c ， $\sin A = 2\sin B \sin C$ ，下列说法正确的是 ()

A. 若 $a = 1$ ，则 $S_{\triangle ABC} = \frac{3}{4}$

B. $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $\frac{bc}{a}$

C. $\frac{c}{b} + \frac{b}{c}$ 取得最小值时， $A = \frac{\pi}{3}$

D. $A = \frac{\pi}{4}$ 时， $\frac{c}{b} + \frac{b}{c}$ 取得最大值为 $2\sqrt{2}$

10. 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中， E, F, G 分别为棱 BB', DD', CC' 上的一点，且

$\frac{D'F}{D'D} = \frac{B'E}{B'B} = \frac{CG}{C'C} = \lambda$ ， H 是 $B'C'$ 的中点， I 是棱 $C'D'$ 上的动点，则 ()

A. 当 $\lambda = \frac{1}{3}$ 时， $G \in$ 平面 AEF

B. 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时， $AC' \subset$ 平面 AEF

C. 当 $0 < \lambda < 1$ 时，存在点 I ，使 A, F, H, I 四点共面

D. 当 $0 < \lambda < 1$ 时，存在点 I ，使 FI, EH, CC' 三条直线交于同一点

11. 已知 $a > 1$, $b > 1$, $\frac{a}{a-1} = 2^a$, $\frac{b}{b-1} = \log_2 b$, 则以下结论正确的是 ()

A. $a + 2^a = b + \log_2 b$

B. $\frac{1}{2^a} + \frac{1}{\log_2 b} = 1$

C. $a - b < -2$

D. $a + b > 4$

12. 已知双曲线 $\Gamma: x^2 - y^2 = a^2 (a > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , 过 F_2 的直线 l 与双曲线 Γ 的右支交于点 B 、 C , 与双曲线 Γ 的渐近线交于点 A 、 D (A 、 B 在第一象限, C 、 D 在第四象限), O 为坐标原点, 则下列结论正确的是 ()

A. 若 $BC \perp x$ 轴, 则 $\triangle BCF_1$ 的周长为 $6a$

B. 若直线 OB 交双曲线 Γ 的左支于点 E , 则 $BC \parallel EF_1$

C. $\triangle AOD$ 面积的最小值为 $4a^2$

D. $|AB| + |BF_1|$ 的取值范围为 $(3a, +\infty)$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 $\alpha \in (0, \pi)$, $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值为_____.

14. 某次社会实践活动中, 甲、乙两个班的同学共同在一社区进行民意调查. 参加活动的甲、乙两班的人数之比为 5:3, 其中甲班中女生占 $\frac{3}{5}$, 乙班中女生占 $\frac{1}{3}$. 则该社区居民遇到一位进行民意调查的同学恰好是女生的概率是_____.

15. 已知平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 且满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, 若 $\vec{e}$ 为平面单位向量, 则 $|\vec{a} \cdot \vec{e} + \vec{b} \cdot \vec{e}|$ 的最大值_____.

16. 设 $n \in \mathbb{N}^*$, a_n 为 $(x+4)^n - (x+1)^n$ 的展开式的各项系数之和, $b_n = \left\lfloor \frac{a_1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a_2}{5^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{na_n}{5^n} \right\rfloor$ ($[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数), 则 $(n-t)^2 + (b_n - 2 + t)^2$ ($t \in \mathbb{R}$) 的最小值为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 已知函数 $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + \frac{1}{2}$, $x \in (0, \pi)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 角 A 所对边 $a = \sqrt{19}$, 角 B 所对边 $b = 5$, 若 $f(A) = 0$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

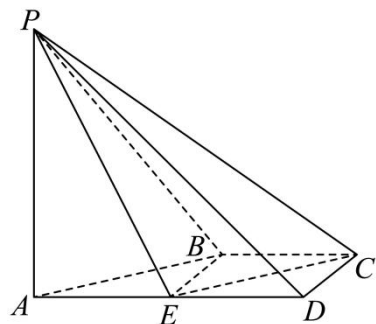
18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_n}{a_n + 2} = \frac{1}{2} a_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $a_1 = 1$.

(1) 证明：数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 为等差数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若记 b_n 为满足不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^n < a_k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 的正整数 k 的个数，数列 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n ，

求关于 n 的不等式 $S_n < 2023$ 的最大正整数解。

19. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle ADC = \angle PAB = 90^\circ$ ， $BC = CD = \frac{1}{2}AD$ 。E 为棱 AD 的中点，异面直线 PA 与 CD 所成的角为 90° 。



(I) 在平面 PAB 内找一点 M，使得直线 $CM \parallel$ 平面 PBE，并说明理由；

(II) 若二面角 $P-CD-A$ 的大小为 45° ，求直线 PA 与平面 PCE 所成角的正弦值。

20. 近年来随着新能源汽车的逐渐普及，传统燃油车市场的竞争也愈发激烈。近日，各地燃油车市场出现史诗级大降价的现象，引起了广泛关注。2023 年 3 月以来，各地政府和车企打出了汽车降价促销“组合拳”，被誉为“史上最卷”的汽车降价促销潮从南到北，不断在全国各地蔓延，据不完全统计，十几家车企的近 40 个传统燃油车品牌参与了此次降价，从几千元到几万元助力汽车消费复苏。记发放的补贴额度为 x （千元），带动的销量为 y （千辆）。某省随机抽查的一些城市的数据如下表所示。

x	3	3	4	5	5	6	6	8
y	10	12	13	18	19	21	24	27

(1) 根据表中数据，求出 y 关于 x 的线性回归方程。

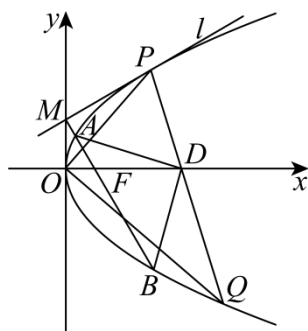
(2) (i) 若该省 A 城市在 2023 年 4 月份准备发放额度为 1 万元的补贴消费券，利用 (1) 中求得的线性回归方程，预计可以带动多少销量？

(ii) 当实际值与估计值的差的绝对值与估计值的比值不超过 10% 时，认为发放的该轮消费券助力消费复苏是理想的。若该省 A 城市 4 月份发放额度为 1 万元的消费补贴券后，经过一个月的统计，发现实际带动的消费为 3 万辆，请问发放的该轮消费券助力消费复苏是否理想？若不理想，请分析可能存在的原因。

参考公式：
$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

参考数据：
$$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 69, \sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2 = 20.$$

21. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , $D(1, 0)$, 点 P 是在第一象限内 C 上的一个动点, 当 DP 与 x 轴垂直时, $|PF| = \frac{5}{4}$, 过点 P 作与 C 相切的直线 l 交 y 轴于点 M , 过点 M 作直线 l 的垂线交抛物线 C 于 A , B 两点.



(1) 求 C 的方程;

(2) 如图, 连接 PD 并延长, 交抛物线 C 于点 Q .

① 设直线 AB , OQ (其中 O 为坐标原点) 的斜率分别为 k_1, k_2 , 证明: $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值;

② 求 $\frac{S_{\triangle OPQ}}{S_{\triangle ABD}}$ 的最小值.

22. 已知函数 $f(x) = x \cos x$, $g(x) = a \sin x$.

(1) 若 $a = 1$, 证明: 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时 $x > g(x) > f(x)$;

(2) 当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\frac{f(x)}{g(x)} < \frac{\sin x}{x}$, 求 a 的取值范围.