高二质量检测联合调考
数学参考答案

1. C　因为 $B=\{x|x^2-2x-3>0\}=\{x|x<-1$ 或 $x>3\}$，所以 $A\cup B=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

2. B　若 $b>a>0$，则 $a(b+1)>a^2$. 若 $a(b+1)>a^2$，可能 $a=1$，$b=\frac{1}{2}$. 故“$b>a>0$”是“$a(b+1)>a^2$”的充分不必要条件.

3. C　由全概率公式可得，做对该题的概率为 $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$.

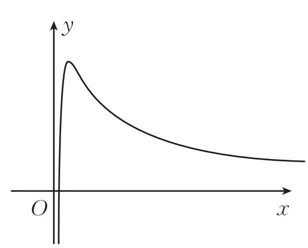
4. D　不同的串法有 $A_5^5=120$ 种.

5. B　将 $\bar{x}=2$ 代入 $\hat{y}=2x-0.4$，得 $\bar{y}=3.6$. 去除两个样本点 $(-3,1)$ 和 $(3,-1)$ 后，$\overline{X}=\frac{2\times10}{8}=\frac{5}{2}$，$\overline{Y}=\frac{3.6\times10}{8}=\frac{9}{2}$，$\hat{a}=\frac{9}{2}-3\times\frac{5}{2}=-3$，故去除样本点 $(-3,1)$ 和 $(3,-1)$ 后的回归直线方程为 $\hat{y}=3x-3$. 当 $x=4$ 时，$\hat{y}=3\times4-3=9$，则样本 $(4,8)$ 的残差为 $8-9=-1$.

6. C　$f'(x)=\frac{-ax^2-2bx+4a}{(x^2+4)^2}$，依题意可得 $\begin{cases}f'(-1)=\frac{-a+2b+4a}{(1+4)^2}=0,\\ f(-1)=\frac{-a+b}{1+4}=1,\end{cases}$ 解得 $a=-2$，$b=3$，所以 $f(x)=\frac{3-2x}{x^2+4}$，$f'(x)=\frac{2x^2-6x-8}{(x^2+4)^2}=\frac{2(x+1)(x-4)}{(x^2+4)^2}$. 令 $f'(x)>0$，解得 $x>4$ 或 $x<-1$，令 $f'(x)<0$，解得 $-1<x<4$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(4,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-1,4)$ 上单调递减，即 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值，在 $x=4$ 处取得极小值，所以 $f(x)_{极小值}=f(4)=-\frac{1}{4}$.

7. A　因为 $P(\overline{A}|\overline{C})=0.9$，所以 $P(A|\overline{C})=1-P(\overline{A}|\overline{C})=0.1$.
因为 $P(C)=0.005$，所以 $P(\overline{C})=0.995$，
所以 $P(C|A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{P(A|C)\cdot P(C)}{P(A|C)\cdot P(C)+P(A|\overline{C})\cdot P(\overline{C})}=\frac{0.9\times0.005}{0.9\times0.005+0.1\times0.995}=\frac{9}{208}$.

8. D　因为 $f(x)=\ln(3x)-ax^2-bx+1\leqslant0$，所以 $\frac{\ln(3x)+1}{x}\leqslant ax+b$.
令函数 $g(x)=\frac{\ln(3x)+1}{x}$，$g'(x)=\frac{-\ln(3x)}{x^2}$.
$x\in(0,\frac{1}{3})$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，$x\in(\frac{1}{3},+\infty)$，$g'(x)<0$，



$g(x)$单调递减，且当 $x>\frac{1}{3}$时，$g(x)>0$，$g(x)$的图象如图所示.

满足题意时，直线 $y=ax+b$ 恒不在 $g(x)$图象的下方，很明显当 $a<0$ 时不符合题意.

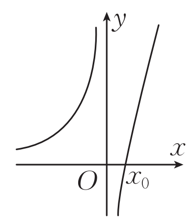
当 $a>0$ 时，令 $ax+b=0$，得$\frac{b}{a}=-x$，所以当$\frac{b}{a}$取得最小值时，直线 $y=ax+b$ 在 x 轴上的截距最大.

令 $g(x)=0$，得 $x=\frac{1}{3\mathrm{e}}$，则$-x=-\frac{1}{3\mathrm{e}}$. 故$\frac{b}{a}$的最小值是$-\frac{1}{3\mathrm{e}}$.

9. AB　AB 所对应的成对样本数据呈现出线性相关关系.

10. AC　$P(X=1)=\frac{3}{4}$，$E(X)=\frac{3}{4}$，$D(X)=\frac{1}{4}\times(0-\frac{3}{4})^2+\frac{3}{4}\times(1-\frac{3}{4})^2=\frac{3}{16}$，$E(2X+3)=2E(X)+3=2\times\frac{3}{4}+3=\frac{9}{2}$，$D(3X+2)=9D(X)=9\times\frac{3}{16}=\frac{27}{16}$.

11. ABD　$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. $f'(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{x^2}>0$，所以$f(x)$在$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$上单调递增. 当 $x\in(-\infty,0)$时，$f(x)>0$，且 $f(\frac{1}{2})=\sqrt{\mathrm{e}}-2<0$，$f(1)=\mathrm{e}-1>0$，所以存在 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(x_0)=0$，C 错误.



$f(x)$的图象如图所示，因为 $f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot f(x_3)<0$，所以 $0<x_1<x_2<x_3<x_0<1$ 或 $x_1<x_2<0<x_3<x_0$ 或 $x_1<0<x_2<x_0<x_3$ 或 $0<x_1<x_0<x_2<x_3$.

12. ACD　因为 $g'(x+1)$为奇函数，所以 $g'(-x+1)+g'(x+1)=0$①，$g'(x)$的图象关于点$(1,0)$对称，则 $g'(1)=0$. $f'(x)=\frac{1}{2}g'(\frac{x+1}{2})+1$，则 $f'(1)=\frac{1}{2}g'(1)+1=1$，A 正确.

因为 $f(x)$为偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，则$-f'(-x)=f'(x)$，即 $f'(x)+f'(-x)=0$，故 $f'(x)$的图象关于原点对称，$f'(0)=0$. 因为 $f'(x)=\frac{1}{2}g'(\frac{x+1}{2})+1$，所以 $g'(x)=2f'(2x-1)-2$，$g'(\frac{1}{2})=2f'(2\times\frac{1}{2}-1)-2=-2$，B 错误.

因为 $g'(x)$的图象关于点$(1,0)$对称，所以 $g'(\frac{3}{2})=-g'(\frac{1}{2})=2$，C 正确.

因为 $g'(x)$的图象关于点$(\frac{1}{2},-2)$对称，所以 $g'(x+1)+g'(-x)=-4$②.

由①②可得 $g'(x+1)-g'(x)=4$，所以 $g'(2)=4+g'(1)=4$，D 正确.

13. 3　$\sqrt{a}+\frac{4}{\sqrt{a}+1}=\sqrt{a}+1+\frac{4}{\sqrt{a}+1}-1\geqslant2\sqrt{(\sqrt{a}+1)\cdot\frac{4}{\sqrt{a}+1}}-1=3$，当且仅当 $a=1$ 时，等号成立.

14. 0.75　$P(60\leqslant X\leqslant80)=P(80\leqslant X\leqslant100)=0.25$，所以 $P(X<100)=0.5+0.25=0.75$.

15. 2　因为点$(2,1)$在曲线 $y=\frac{f(x)}{x}$上，所以$\frac{f(2)}{2}=1$，即 $f(2)=2$. 因为切线过点$(0,0)$，$(2,1)$，

所以这条切线的斜率为$\frac{1}{2}$. 设 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，$g'(2)=\frac{2f'(2)-f(2)}{2^2}=\frac{1}{2}$，解得 $f'(2)=2$.

16. 266　若将 6 支救援队分成 1，1，4 三组，再分到 A,B,C 三个受灾点，共有$\frac{C_6^1C_5^1C_4^4}{A_2^2}\cdot A_2^2=30$种不同的安排方法，其中甲、乙去同一个地方的有 $C_4^2\cdot A_2^2=12$ 种，所以有 $N_1=30-12=18$ 种不同的安排方法；

若将 6 支救援队分成 1，2，3 三组，再分到 A,B,C 三个受灾点，共有 $C_6^1C_5^2C_3^3C_2^1A_2^2=240$ 种不同的安排方法，其中甲、乙去同一个地方的有$(C_4^1+C_4^1C_3^1)C_2^1A_2^2=64$ 种，所以有 $N_2=240-64=176$ 种不同的安排方法；

若将 6 支救援队分成 2，2，2 三组，再分到 A,B,C 三个受灾点，共有$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}\cdot A_3^3=90$ 种不同的安排方法，其中甲、乙去同一个地方的有$\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}\cdot A_3^3=18$ 种，所以有 $N_3=90-18=72$ 种不同的安排方法. 故共有 $N=N_1+N_2+N_3=266$ 种不同的安排方法.

17. 解：(1)由题意可得，展开式中有 11 项，所以 $n=10$. ………………………………………… 4 分

(2)由(1)得$(a+b)^n+7=(3+1)^{10}+7$

$=3^{10}+C_{10}^1\times3^9+C_{10}^2\times3^8+\cdots+C_{10}^9\times3+C_{10}^{10}+7$

$=3^{10}+C_{10}^1\times3^9+C_{10}^2\times3^8+\cdots+C_{10}^9\times3+8$.

故所求的余数为 2. …………………………………………………………………………… 10 分

18. 解：(1)由调查问卷知，200 名物理方向的研究生中有 140 名喜欢专利代理方向就业，

所以估计物理方向的研究生喜欢专利代理方向就业的概率为$\frac{7}{10}$. ……………………… 2 分

从物理方向的研究生中任选 3 人，设喜欢专利代理方向就业的人数为 X，

则 $P(X\geqslant2)=C_3^2\times(\frac{7}{10})^2\times\frac{3}{10}+(\frac{7}{10})^3=\frac{98}{125}$，……………………………………… 5 分

即估计从物理方向的研究生中任选 3 人，至少有 2 人喜欢专利代理方向就业的概率为$\frac{98}{125}$.

……………………………………………………………………………………………… 6 分

(2)零假设为 H_0：物理方向的研究生专利代理方向就业意向与性别没有关联.

$\chi^2=\frac{200\times(40\times80-20\times60)^2}{140\times60\times100\times100}=\frac{200}{21}\approx9.524>7.879$，……………………………… 9 分

所以根据 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，可以推断 H_0 不成立，

所以物理方向的研究生专利代理方向就业意向与性别有关联，此推断犯错误的概率不大于 0.005. ……………………………………………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)$f'(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$f'(4)=\frac{7}{4}$，$f(4)=2$，…………………………………… 2 分

则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(4,f(4))$ 处的切线方程为 $y-2=\frac{7}{4}(x-4)$,即 $7x-4y-20=0$. …… ………………………………………………………… 4 分

(2) $f'(x)=\frac{x\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$. ………………………………………… 5 分

令函数 $g(x)=x\sqrt{x}-1$,$g'(x)=\frac{3\sqrt{x}}{2}\geqslant 0$,所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……… 7 分

因为 $g(1)=0$,所以当 $x>1$ 时,$x\sqrt{x}-1>0$,即 $f'(x)>0$,当 $0<x<1$ 时,$x\sqrt{x}-1<0$,即 $f'(x)<0$, ………………………………………………… 9 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增, ……………………… 10 分

则 $f(x)\geqslant f(1)=-\frac{3}{4}$. ………………………………………… 11 分

因为 $f(x)\geqslant a$ 恒成立,所以 $a\leqslant -\frac{3}{4}$.

故 a 的取值范围为 $(-\infty,-\frac{3}{4}]$. ………………………………………… 12 分

20. 解:(1)所求概率为 $\frac{C_3^1C_4^2C_2^1+C_3^2C_4^2}{3^4}=\frac{2}{3}$. ………………………………… 4 分

(2) X 的取值可能为 3,4,5,6,7.

$P(X=3)=\frac{3}{3^3}=\frac{1}{9}$, ………………………………………… 5 分

$P(X=4)=\frac{C_3^1C_2^1C_3^1}{3^4}=\frac{2}{9}$, ………………………………………… 6 分

$P(X=5)=\frac{C_3^1C_4^2C_2^1+C_3^1C_4^2C_2^1}{3^5}=\frac{8}{27}$, ………………………………… 8 分

$P(X=6)=\frac{C_3^1C_5^1C_4^2C_2^1}{3^6}=\frac{20}{81}$, ………………………………… 9 分

$P(X=7)=\frac{C_6^2C_4^2C_3^1}{3^7}=\frac{10}{81}$. ………………………………… 10 分

X 的分布列为

X	3	4	5	6	7
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{20}{81}$	$\frac{10}{81}$

$E(X)=3\times\frac{1}{9}+4\times\frac{2}{9}+5\times\frac{8}{27}+6\times\frac{20}{81}+7\times\frac{10}{81}=\frac{409}{81}$. ……………… 12 分

21. 解:(1) X 的取值可能为 1,2,3,4,5,6.

$P(X=1)=P(X=6)=(\frac{1}{2})^5=\frac{1}{32}$, ………………………………… 1 分

$P(X=2)=P(X=5)=C_5^1\times\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^4=\frac{5}{32}$, ……………………………… 2 分

$P(X=3)=P(X=4)=C_5^2\times(\frac{1}{2})^2\times(\frac{1}{2})^3=\frac{5}{16}$. ………………………………………… 3 分

因为 $Y=|20-5X|$,所以 Y 的取值可能为 0,5,10,15.

$P(Y=0)=P(X=4)=\frac{5}{16}$,

$P(Y=5)=P(X=3)+P(X=5)=\frac{15}{32}$,

$P(Y=10)=P(X=2)+P(X=6)=\frac{3}{16}$,

$P(Y=15)=P(X=1)=\frac{1}{32}$. ………………………………………………… 5 分

Y 的分布列为

Y	0	5	10	15
P	$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{32}$

$E(Y)=0\times\frac{5}{16}+5\times\frac{15}{32}+10\times\frac{3}{16}+15\times\frac{1}{32}=\frac{75}{16}\approx4.7$, ………………………… 7 分

则顾客玩一次游戏立减金额的均值约为 4.7 元.

又因为该商品成本价是 10 元,所以该商品的最低定价应为 15 元. ………………… 8 分

(2)由(1)得 $P(X=3)=\frac{5}{16}$.

进行 79 次高尔顿板试验,设小球落入 3 号球槽的个数为 ξ,则 $\xi\sim B(79,\frac{5}{16})$. ……… 10 分

$$\frac{P(\xi=k)}{P(\xi=k-1)}=1+\frac{(79+1)\times\frac{5}{16}-k}{k(1-\frac{5}{16})}=1+\frac{25-k}{\frac{11k}{16}}.$$

当 $k<25$ 时,$\frac{P(\xi=k)}{P(\xi=k-1)}>1$,即 $P(\xi=k)>P(\xi=k-1)$;

当 $k=25$ 时,$\frac{P(\xi=k)}{P(\xi=k-1)}=1$,即 $P(\xi=k)=P(\xi=k-1)$;

当 $k>25$ 时,$\frac{P(\xi=k)}{P(\xi=k-1)}<1$,即 $P(\xi=k)<P(\xi=k-1)$.

所以当 $k=25$ 时,$P(\xi=25)=P(\xi=24)$,此时这两项概率均为最大值.

故 3 号球槽中落入 24 或 25 个小球的概率最大. ………………………………… 12 分

22.(1)解:$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. ………………………………… 1 分

$f'(x)=\frac{(x-1)e^x+1}{x^2}$. ……………………………………………………… 2 分

令函数 $g(x)=(x-1)e^x+1$,$g'(x)=xe^x$.

当 $x<0$ 时,$g'(x)<0$;当 $x>0$ 时,$g'(x)>0$.

所以 $g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增. ………………… 3 分

$g(x)\geqslant g(0)=0$,所以 $f'(x)>0$.

故 $f(x)$在$(-\infty,0)$,$(0,+\infty)$上单调递增. ………………………… 4 分

(2)证明:当 $x>0$ 时,$f(x)>x\ln(x+1)$,即当 $x>0$ 时,$\dfrac{e^x-1}{x^2}>\ln(x+1)$. ………… 5 分

令函数 $h(x)=\dfrac{e^x-1}{x^2}-\dfrac{x}{4}-1$,$h'(x)=\dfrac{(x-2)e^x+2-\dfrac{x^3}{4}}{x^3}$.

令函数 $\mu(x)=(x-2)e^x+2-\dfrac{x^3}{4}$,$\mu'(x)=(x-1)e^x-\dfrac{3x^2}{4}$.

令函数 $\varphi(x)=(x-1)e^x-\dfrac{3x^2}{4}$,$\varphi'(x)=x(e^x-\dfrac{3}{2})$. ………………………… 6 分

当 $0<x<\ln\dfrac{3}{2}$时,$\varphi'(x)<0$;当 $x>\ln\dfrac{3}{2}$时,$\varphi'(x)>0$.

所以 $\varphi(x)$在$(0,\ln\dfrac{3}{2})$上单调递减,在$(\ln\dfrac{3}{2},+\infty)$上单调递增.

又 $\varphi(0)=-1<0$,$\varphi(2)=e^2-3>0$,所以存在 $x_0\in(0,2)$,使得 $\varphi(x_0)=0$. ………… 7 分

当 $0<x<x_0$ 时,$\varphi(x)<0$;当 $x>x_0$ 时,$\varphi(x)>0$.

所以 $\mu(x)$在$(0,x_0)$上单调递减,在$(x_0,+\infty)$上单调递增.

又因为 $\mu(0)=0$,$\mu(2)=0$,所以当 $0<x<2$ 时,$\mu(x)<0$,当 $x>2$ 时,$\mu(x)>0$,

即当 $0<x<2$ 时,$h'(x)<0$,当 $x>2$ 时,$h'(x)>0$.

所以 $h(x)$在$(0,2)$上单调递减,在$(2,+\infty)$上单调递增. ………………………… 8 分

则 $h(x)\geqslant h(2)=\dfrac{e^2-7}{4}>\dfrac{2.7^2-7}{4}>0$,所以$\dfrac{e^x-1}{x^2}-\dfrac{x}{4}-1>0$,即$\dfrac{e^x-1}{x^2}>\dfrac{x}{4}+1$. ……… 9 分

令函数 $F(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x}{4}-1$,$F'(x)=\dfrac{3-x}{4(x+1)}$.

当 $0<x<3$ 时,$F'(x)>0$;当 $x>3$ 时,$F'(x)<0$.

所以 $F(x)$在$(0,3)$上单调递增,在$(3,+\infty)$上单调递减,

则 $F(x)\leqslant F(3)=\ln 4-\dfrac{7}{4}$. ………………………… 10 分

因为 $e^{\frac{7}{4}}>e^{\frac{3}{2}}>\sqrt{2.7^3}=\sqrt{19.683}>4$,所以$\dfrac{7}{4}>\ln 4$, ………………………… 11 分

所以 $F(x)\leqslant F(3)<0$,所以 $\ln(x+1)-\dfrac{x}{4}-1<0$,即$\dfrac{x}{4}+1>\ln(x+1)$.

综上,当 $x>0$ 时,$f(x)>x\ln(x+1)$. ………………………… 12 分