数学参考答案

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	B	C	D	C	C	A	C

【解析】

1．解不等式 $1-x^2\geqslant 0$ 得 $-1\leqslant x\leqslant 1$，故集合 $A=\{x\,|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，阴影部分表示的集合为 $(\complement_U A)\cap B=\{x\,|\,1<x\leqslant 2\}$，故选 B．

2．因为 $\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$，故 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}=-1+2\mathrm{i}$，在复平面内对应的点为 $(-1,\ 2)$，故选 B．

3．圆心 $C(1,\ 0)$，半径 $r=2$，圆心到直线 l 的直线距离 $d=\sqrt{2}$，$\therefore$ 弦长为 $2\sqrt{4-2}=2\sqrt{2}$，故选 C．

4．根据 N 的标准分解式可得 $180=2^2\times 3^2\times 5$，故 180 的正因子个数为 $3\times 3\times 2=18$，故选 D．

5．由题意，$\dfrac{a_1+a_5}{a_1a_5}=\dfrac{5}{8}$，$a_1a_5=a_3^2=16$，$\therefore a_1+a_5=10$，因为 $\{a_n\}$ 是递增的数列，解方程组得 $a_1=2$，$a_5=8$，$\therefore q^2=2$，$\therefore a_7=a_5q^2=16$，故选 C．

6．事件 A_1 与 A_2 可以同时发生，故 A 错误；由全概率公式得 $P(A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2\,|\,A_1)+P(\overline{A_1})\cdot P(A_2\,|\,\overline{A_1})=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{5}$，故 B 错误；由概率的乘法公式得 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2\,|\,A_1)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{10}$，故 C 正确；由条件概率公式 $P(A_3\,|\,A_2)=\dfrac{P(A_2A_3)}{P(A_2)}$，其中 $P(A_2A_3)=\dfrac{3}{10}$，$\therefore P(A_3\,|\,A_2)=\dfrac{1}{2}$，故 D 错误，综上，故选 C．

7．$\because \alpha,\ \beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$，$\tan\beta=\dfrac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}=\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$ $=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$，所以 $\beta=\dfrac{\pi}{4}+\alpha$，故选 A．

8．$\because g(x+2)$ 是偶函数，$\therefore g(2-x)=g(2+x)$，又 $f(x)+g(2+x)=4$，$f(-x)+g(2-x)=4$，$\therefore f(-x)=f(x)$，$\therefore f(x)$ 是偶函数；$\because f(x+2)+f(x)=2$，$\therefore f(x+2)+f(-x)=2$，$\therefore f(x)$ 关于点 $(1,\ 1)$ 中心对称；又 $f(-x+2)+f(-x)=2$，$\therefore f(-x+2)=f(x+2)$，即

$f(x+4)=f(x)$，∴ 4 是 $f(x)$ 的一个周期；令 $x=0$，可得 $f(0)+g(2)=4$，∴ $f(0)=2$，$f(2)=0$，又 $f(1)=1$，∴ $f(3)=1$，∴ $f(2023)=f(4\times 505+3)=f(3)=1$，$\sum\limits_{k=1}^{15} f(k)=4\times 3+f(1)+f(2)+f(3)=12+2=14$，故选 C.

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	ACD	BD	ABC	AC

【解析】

9．由题意，$|\vec{e_1}|=|\vec{e_2}|=1$，$\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=\dfrac{1}{2}$，$|\vec{a}|^2=(\vec{e_1}-2\vec{e_2})^2=1+4-4\times\dfrac{1}{2}=3$，∴ $|\vec{a}|=\sqrt{3}$，故 A 正确；$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{e_1}-2\vec{e_2})\cdot(\vec{e_1}+\vec{e_2})=-\dfrac{3}{2}\neq 0$，故 B 错误；∵ $|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{3}$，∴ $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=-\dfrac{1}{2}$，∴ $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{2\pi}{3}$，故 C 正确；由 C 知 D 正确，故选 ACD.

10．$f(x)=\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π，故 A 错误；把 $f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，所得函数为 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}=\cos 2x+\dfrac{1}{2}$，是偶函数，所以图象关于 y 轴对称，故 B 正确；当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\ m\right]$ 时，$2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\ 2m+\dfrac{\pi}{6}\right]$，当 $2m+\dfrac{\pi}{6}\geqslant\dfrac{\pi}{2}$，即 $m\geqslant\dfrac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 最大值为 $\dfrac{3}{2}$，所以 m 的最小值为 $\dfrac{\pi}{6}$，故 C 错误；令 $2x+\dfrac{\pi}{6}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k}{2}\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=1$ 时，$f(x)$ 的一个对称中心为 $\left(\dfrac{5\pi}{12},\ \dfrac{1}{2}\right)$，故 $x_1+x_2=\dfrac{5\pi}{6}$ 时，有 $f(x_1)+f(x_2)=1$，故 D 正确；综上，故选 BD.

11．由题意知 $f(x)$ 的零点个数即为 $y=|\ln x|$ 和 $y=kx+1$ 的图象的交点个数，在同一平面直角坐标系内画出 $y=|\ln x|$ 和 $y=kx+1$ 的图象，由图可知，当 $k=0$ 时，图象有两个不同的交点，故 A 正确；设直线 $y=kx+1$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切于点 $P(x_0,\ \ln x_0)$，$x_0>1$，则

$\frac{1}{x_0}=\frac{\ln x_0-1}{x_0}\Rightarrow x_0=e^2$，故切线斜率$k=\frac{1}{e^2}$，所以当$0<k<e^{-2}$，直线$y=kx+1$与$y=|\ln x|$有3个不同的交点，则$f(x)$有3个零点，故B正确；设直线$y=kx+1$与曲线$y=-\ln x$相切于点$Q(x_0,-\ln x_0)$，$0<x_0\leqslant 1$，则$-\frac{1}{x_0}=\frac{-\ln x_0-1}{x_0}\Rightarrow x_0=1$，故切线斜率$k=-1$，所以当$k=-1$时，$f(x)$恰有1个零点，故C正确；当$k<0$时，直线$y=kx+1$与$y=|\ln x|$的图象至多有2个交点，故D错误；综上，故选ABC.

12．当$\lambda=\frac{1}{3}$时，$AM=\frac{1}{3}AC_1$，连接A_1B,BD,A_1D，易知平面A_1BD∥平面CB_1D_1，且$AC_1\cap$平面$A_1BD=M$，$\therefore DM\subset$平面A_1BD，$\therefore DM$∥平面CB_1D_1，故A正确；当$\mu=\frac{1}{2}$时，N为CD中点，分别取AB,BC中点G,H，连接B_1G,GH,HB_1，则B_1G∥C_1N，GH∥A_1C_1，$\therefore$平面B_1GH∥平面A_1NC_1，$\therefore P$点轨迹为$\triangle B_1GH$，$\therefore |B_1P|_{max}=|B_1G|=|B_1H|=\sqrt{5}$，故B错误；当$\lambda=\mu=\frac{1}{2}$时，$M,N$分别为$AC_1,CD$的中点，只需过点$M$作直线$D_1N$的垂面即可，垂面与正方体表面的交线即为点$P$的轨迹，分别取$DD_1,AA_1$的中点$R,S$，连接$C_1R,RS,SB_1$，易知$D_1N\perp$平面$B_1C_1RS$，过点$M$作平面$TUR_1S_1$∥平面$B_1C_1RS$分别交$BB_1,CC_1,DD_1,AA_1$于点$T,U,R_1,S_1$，则$P$点轨迹为四边形$TUR_1S_1$，其周长与四边形$B_1C_1RS$的周长相等，$\therefore P$点的轨迹的长度为$4+2\sqrt{5}$，故C正确；过$C_1$作$C_1Q$∥$AN$交$A_1B_1$于点$Q$，则截面为四边形$ANC_1Q$，若截面为矩形，则$AN\perp C_1N$，设$CN=x$，则由勾股定理得$x^2+4+(2-x)^2+4=12$，解得$x=0$或$x=2$，此时$N$点与$C$或$D$重合，与题目矛盾，故截面不可能为矩形，D错误；综上，故选AC.

三、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

题号	13	14	15	16
答案	120	$y=2$或$x-y+1=0$	505	$4\sqrt{7}$

【解析】

13．令$x=1$，可得$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-1$；令$x=-1$，可得$a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5=3^5$；两式相加得$a_0+a_2+a_4=\frac{3^5-1}{2}=121$，令$x=0$，可得$a_0=1$，故$a_2+a_4=120$.

14．当 l 平行于 x 轴时，l 与 C 只有一个公共点，此时方程为 $y=2$；当 l 与抛物线相切时，l 与 C 只有一个公共点，设直线 l 方程为 $x-1=m(y-2)$，联立方程得 $y^2-4my+8m-4=0$，由 $\Delta=0\Rightarrow m=1$，此时直线 l 的方程为 $x-y+1=0$．

15．n 阶幻方共有 n^2 个数，其和为 $1+2+\cdots+n^2=\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}$，∵ n 阶幻方共有 n 行，∴每行的和为 $S_n=\dfrac{\frac{n^2(n^2+1)}{2}}{n}=\dfrac{n(n^2+1)}{2}$，∴ $S_{10}=\dfrac{10(10^2+1)}{2}=505$．

16．过切点 E，F 作出双球模型的轴截面，设球 O_1，O_2 分别与圆锥的母线切于 A，B 两点，过 O_2 作 $O_2C\perp O_1A$ 于点 C，则 $AC=O_2B=3$，∴ $O_1C=3$，又 $O_1O_2=11$，所以 $AB=O_2C=4\sqrt{7}$，设直线 AB 与平面 α 的交点为 P，则 $PA=PE$，$PB=PF$，∴ $2a=PE+PF=PA+PB=AB=4\sqrt{7}$．

四、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 10 分）

解：（1）由题意可得，青年共有 $300\times\dfrac{3}{5}=180$ 人，中老年有 $300-180=120$ 人；

持满意态度的中老年有 $220\times\dfrac{4}{11}=80$ 人，青年有 $220-80=140$ 人；

持不满意态度的中老年有 $120-80=40$ 人，青年有 $180-140=40$ 人，

得 2×2 列联表如下：

年龄	5G 网络满意度		合计
	满意	不满意	
青年（≤45 岁）	140	40	180
中老年（＞45 岁）	80	40	120
合计	220	80	300

……………………………………………………………………………………（3 分）

零假设为 H_0：对 5G 网络的满意度和年龄无关联．

由 2×2 列联表得，$\chi^2=\dfrac{300\times(140\times40-40\times80)^2}{220\times80\times180\times120}=\dfrac{50}{11}\approx4.545>3.841$，

根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，即认为对 5G 网络的满意度和年龄有关联，此推断犯错误的概率不大于 0.05．……………………………………（5 分）

（2）法一：每名客户摸出红球的概率为$\dfrac{3}{3+6}=\dfrac{1}{3}$，

设ξ为100名客户中摸出红球的人数，则$\xi\sim B\left(100,\ \dfrac{1}{3}\right)$，

所以$E(\xi)=100\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{100}{3}$，……………………………………………………（8分）

又$X=5\xi+2(100-\xi)=200+3\xi$，所以$E(X)=200+3E(\xi)=300$，

故运营商需提供充值券总金额X的数学期望为300元．……………………………（10分）

法二：每名客户摸出红球的概率为$\dfrac{3}{3+6}=\dfrac{1}{3}$，

设ξ为每名客户获得的充值券金额，则$\xi=2$，5，

且$P(\xi=2)=\dfrac{2}{3}$，$P(\xi=5)=\dfrac{1}{3}$，

所以$E(\xi)=2\times\dfrac{2}{3}+5\times\dfrac{1}{3}=3$，$E(X)=100E(\xi)=300$，

故运营商需提供充值券总金额X的数学期望为300元．……………………………（10分）

18．（本小题满分12分）

解：（1）$\because b_1=1$，$\therefore a_1=1$．……………………………………………………（1分）

$b_2=2a_1=2$，$\therefore a_2=2$，$b_3=2a_2=4$，$\therefore a_3=2$，$b_4=2a_3=4$．

……………………………………………………………………………（6分）

（2）$\because b_n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$，$\therefore$当$n\geqslant 2$时，$b_{n-1}=2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$，

$\therefore$当$n\geqslant 2$时，$a_n=\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=2^{n-1}$，又$a_1=1$也满足$a_n=2^{n-1}$．……………………（8分）

$\therefore a_n=2^{n-1}$，……………………………………………………………………（9分）

$\therefore c_n=\log_4 a_{2n-1}=\log_4 2^{2n-2}=n-1$，……………………………………………（10分）

$\therefore$数列$\{c_n\}$的前n项和$S_n=0+1+2+\cdots+n-1=\dfrac{n(n-1)}{2}$．

……………………………………………………………………………（12分）

19．（本小题满分12分）

（1）证明：设圆O的半径为r，

在$\triangle AOB$中，$OA=OB=r$，$\angle AOB=\dfrac{2\pi}{3}$，$\angle OAB=\dfrac{\pi}{6}$，

故$AB=\sqrt{3}r$，又$AF=2FB$，故$AF=\dfrac{2\sqrt{3}r}{3}$，

在$\triangle AOF$中，由余弦定理得$OF^2=OA^2+AF^2-2OA\cdot AF\cdot\cos\angle OAF=\frac{1}{3}OA^2=\frac{1}{3}r^2$，

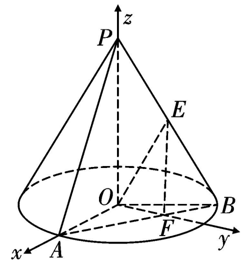
所以$OA^2+OF^2=AF^2$，即$OA\perp OF$；

圆锥中，$PO\perp$底面$\odot O$，$OF\subset$底面$\odot O$，故$PO\perp OF$，

又$OA\cap OP=O$，所以$OF\perp$平面AOP，

又$OF\subset$平面OEF，所以平面$AOP\perp$平面OEF．……………………………………（6 分）

（2）解：以O为原点，建立如图所示的空间直角坐标系$O-xyz$，



不妨设$OA=\sqrt{3}$，则$OP=AB=\sqrt{3}OA=3$，$OF=\frac{\sqrt{3}}{3}OA=1$，

则$A(\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，$P(0,\ 0,\ 3)$，$B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{2},\ 0\right)$，$E\left(-\frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{2}\right)$，

$F(0,\ 1,\ 0)$，

$\overrightarrow{AP}=(-\sqrt{3},\ 0,\ 3)$，$\overrightarrow{OE}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{OF}=(0,\ 1,\ 0)$，

设平面OEF的一个法向量为$\vec{n}=(x,\ y,\ z)$，

有$\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{3}{4}y+\frac{3}{2}z=0,\\ y=0,\end{cases}$解得$\vec{n}=(2\sqrt{3},\ 0,\ 1)$，

设直线AP与平面OEF所成角为θ，

则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AP},\ \vec{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{AP}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|-6+3|}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{39}}{26}$．

……………………………………………………………………………（12 分）

20．（本小题满分 12 分）

解：（1）∵$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=4\sqrt{3}$，∴$|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle BAC=4\sqrt{3}$．

∵$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4$，∴$|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=4$，∴$\tan\angle BAC=\sqrt{3}$，

又$\angle BAC\in(0,\ \pi)$，∴$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，……………………………………………（2 分）

∴$|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|=8$．…………………………………………………………（3 分）

$2|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|\geqslant 2\sqrt{2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=2\sqrt{16}=8$，

∴当且仅当$2|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=4$时，$2|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|$有最小值$8$．………………（5 分）

因此，不存在满足条件的$\triangle ABC$，使得$2|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|=6$．

……………………………………………………………………………（6 分）

（2）由（1）知，当 $2|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|=8$ 时，$|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{AC}|=4$．

………………………………………………………………………………（7 分）

解法一：在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，由余弦定理得，$BC^2=AB^2+AC^2-AB\times BC$，

$BC=2\sqrt{3}$，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$．………………………………………………（8 分）

在 $\triangle ABD$ 中，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，$\sqrt{2}BD=\sqrt{3}AD$，

由正弦定理得，$\frac{BD}{AD}=\frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle ABD}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$，

$\sin\angle ABD=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$BD>AD$，

$\therefore \angle ABD=\frac{\pi}{4}$，$\angle DBC=\frac{\pi}{4}$．………………………………………（10 分）

$$\frac{|\overrightarrow{DB}\times\overrightarrow{DA}|}{|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD}|}=\frac{|\overrightarrow{DB}||\overrightarrow{DA}|\sin\angle ADB}{|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CD}|\sin\angle DCB}=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CBD}}=\frac{\frac{1}{2}|AB||BD|\sin\angle ABD}{\frac{1}{2}|BC||BD|\sin\angle DBC}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

………………………………………………………………………………（12 分）

解法二：

在 $\triangle ABD$ 中，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，$\sqrt{2}BD=\sqrt{3}AD$，由正弦定理得，$\frac{BD}{AD}=\frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle ABD}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$，

$\sin\angle ABD=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$BD>AD$，$\therefore \angle ABD=\frac{\pi}{4}$，…………………………………（8 分）

$\therefore \angle BDA=\frac{5\pi}{12}$，

又 $\frac{AD}{\sin\angle ABD}=\frac{AB}{\sin\angle BDA}$，$\frac{AD}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)}$，$AD=2(\sqrt{3}-1)$．

$\therefore CD=2(3-\sqrt{3})$．……………………………………………………………（10 分）

$$\frac{|\overrightarrow{DB}\times\overrightarrow{DA}|}{|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD}|}=\frac{|\overrightarrow{DB}||\overrightarrow{DA}|\sin\angle ADB}{|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CD}|\sin\angle DCB}=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CBD}}=\frac{|AD|}{|CD|}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{2(3-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

………………………………………………………………………………（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

解：（1）由 $f(1)=4a$，得 $a+b+c=4a$，又 $6a+b=0$，

$\therefore b=-6a$，$c=9a$，$f(x)=ax^3-6ax^2+9ax$．

$f'(x)=3ax^2-12ax+9a=3a(x^2-4x+3)=3a(x-1)(x-3)$，…………………………（2分）

$\because a\neq 0$，令 $f'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $x=3$.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x<1$ 或 $x>3$；令 $f'(x)<0$，得 $1<x<3$.

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 和 $(3,+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,3)$ 上单调递减.

……………………………………………………………………（4分）

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)<0$，得 $x<1$ 或 $x>3$；令 $f'(x)>0$，得 $1<x<3$.

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 和 $(3,+\infty)$ 上单调递减，在 $(1,3)$ 上单调递增.

……………………………………………………………………（6分）

（2）$f(x)=ax(x^2-6x+9)=ax(x-3)^2$，

令 $f(x)-x\mathrm{e}^{-x}=0$，得 $ax(x-3)^2=x\mathrm{e}^{-x}$，$x=0$ 或 $a(x-3)^2=\mathrm{e}^{-x}$，

则 $x_1=0$，x_2, x_3 是 $a(x-3)^2=\mathrm{e}^{-x}$ 的两个不等正根. …………………………（8分）

$\therefore x_1+x_2+x_3=0+x_2+x_3=x_2+x_3$，

由 $a(x-3)^2=\mathrm{e}^{-x}$ 知：$a>0$，$\therefore \ln a+2\ln(3-x)=\ln\mathrm{e}^{-x}$，

$\ln a+2\ln(3-x_2)=-x_2$，$\ln a+2\ln(3-x_3)=-x_3$.

$\therefore 2\ln(3-x_3)-2\ln(3-x_2)=x_2-x_3$，

$2\ln(3-x_3)-2\ln(3-x_2)=(3-x_3)-(3-x_2)$，

令 $3-x_2=t_2>0$，$3-x_3=t_3>0$，

则 $2\ln t_3-2\ln t_2=t_3-t_2$，

法一：$2=\dfrac{t_3-t_2}{\ln t_3-\ln t_2}$，

由对数均值不等式 $\dfrac{t_3-t_2}{\ln t_3-\ln t_2}<\dfrac{t_3+t_2}{2}$，可得 $t_3+t_2>4$，$x_3+x_2<2$，

$\therefore x_1+x_2+x_3<2$. …………………………………………………（12分）

法二：令 $u=\dfrac{t_2}{t_3}>1$，$2\ln t_3-2\ln(ut_3)=t_3-ut_3$，化简可得 $t_3=\dfrac{2\ln u}{u-1}$，

$t_2+t_3=\dfrac{2(u+1)\ln u}{u-1}$，

令 $h(u)=2(u+1)\ln u-4(u-1)$，

$h'(u)=2\left(\ln u+\dfrac{1}{u}-1\right)$，

令 $\varphi(u)=\ln u+\dfrac{1}{u}-1$，$\varphi'(u)=\dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{u^2}=\dfrac{u-1}{u^2}$，

当 $u>1$ 时，$\varphi'(u)>0$，$\varphi(u)>\varphi(1)=0$，$\therefore h'(u)>0$，$h(u)$ 单调递增，$h(u)>h(1)=0$，

$\therefore$ 当 $u>1$ 时，$2(u+1)\ln u>4(u-1)$，即 $t_2+t_3=\dfrac{2(u+1)\ln u}{u-1}>4$，可得 $x_3+x_2<2$，

$\therefore x_1+x_2+x_3<2$. ……………………………………………………………（12 分）

22.（本小题满分 12 分）

（1）解：由题意可知，$2a=2$，$\dfrac{c}{a}=\sqrt{3}$，$c^2=a^2+b^2$，

则 $a=1$，$b=\sqrt{2}$．$\therefore$ 双曲线 C 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$．…………………………（2 分）

设 $P(x_0,\ y_0)$，$M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$，

把 l：$x_0x-\dfrac{y_0y}{2}=1$ 代入 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=0$，得 $(y_0^2-2x_0^2)x^2+4x_0x-2=0$，又 $x_0^2-\dfrac{y_0^2}{2}=1$，

$\therefore \Delta=16x_0^2+8(y_0^2-2x_0^2)=8y_0^2\geqslant 0$，$x_1x_2=\dfrac{2}{2x_0^2-y_0^2}=1$，………………………（5 分）

$\because |\tan\angle MON|=\dfrac{2\dfrac{b}{a}}{\left|1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2\right|}=2\sqrt{2}$，$\therefore \sin\angle MON=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．…………………………（6 分）

$\therefore S=\dfrac{1}{2}|OM||ON|\sin\angle MON=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}^2}|x_1|\sqrt{1+\sqrt{2}^2}|x_2|\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}|x_1x_2|$，

$\therefore S=\sqrt{2}$．………………………………………………………………（8 分）

（2）证明：双曲线渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$，则 $y_1=\sqrt{2}x_1$，$y_2=-\sqrt{2}x_2$．

由 $\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{PN}$，得 $x_0=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$y_0=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\dfrac{\sqrt{2}x_1-\sqrt{2}\lambda x_2}{1+\lambda}$．

……………………………………………………………………………（9 分）

$\because x_0^2-\dfrac{y_0^2}{2}=1$，$\therefore \left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\right)^2-\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{2}x_1-\sqrt{2}\lambda x_2}{1+\lambda}\right)^2}{2}=1$，

化简可得 $x_1x_2=\dfrac{(1+\lambda)^2}{4\lambda}$．……………………………………………………（10 分）

$\therefore S=\dfrac{1}{2}|OM||ON|\sin\angle MON=\sqrt{2}|x_1x_2|=\sqrt{2}\times\dfrac{(1+\lambda)^2}{4|\lambda|}$，

$\therefore \dfrac{(1+\lambda)^2}{|\lambda|\cdot S}=2\sqrt{2}$ 为定值．…………………………………………………（12 分）