

2022—2023 学年海南省高考全真模拟卷(三)

数学·答案

1. D 2. A 3. D 4. A
5. B 6. C 7. B 8. A
9. AB 10. ACD 11. BD 12. ABC

13. $\frac{1}{2}$ 14. $\frac{7}{8}$

15. -2^{n-1} 16. 3

17. 解:(I) 设公差为 d ,

由题意知 $(2a_1 + d)(3a_1 + 3d) = 36$,

将 $a_1 = 1$ 代入上式解得 $d = -5$ 或 2 (舍),

所以 $a_n = 1 + (n-1)(-5) = -5n + 6$.

..... (5 分)

(II) 由(I) 得

$$S_n = \frac{n(1-5n+6)}{2} = \frac{n(-5n+7)}{2},$$

所以 $\frac{S_n}{n} + 9 = -\frac{5}{2}n + \frac{25}{2}$,

故数列 $\left\{\frac{S_n}{n} + 9\right\}$ 是以 10 为首项, $-\frac{5}{2}$ 为公差的等差数列,

令 $-\frac{5}{2}n + \frac{25}{2} \geq 0$, 解得 $n \leq 5$,

故 $(T_n)_{\max} = T_4 = T_5 = \frac{5(10+0)}{2} = 25$,

即当 $n = 4$ 或 5 时, T_n 取得最大值 25.

..... (10 分)

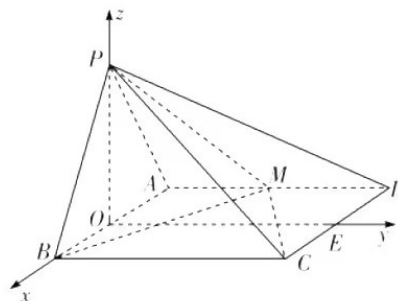
18. 解:(I) 取 AB 的中点 O , 连接 OP , 并过 O 点作 BC 的平行线 OE , 交 CD 于点 E ,
则 $OE \perp AB$.

因为 $\triangle PAB$ 为等边三角形, 所以 $PO \perp AB$.

因为平面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$, 且平面 $PAB \cap$ 底面 $ABCD = AB$,

所以 $PO \perp$ 底面 $ABCD$.

以 O 为坐标原点, $\overrightarrow{OB}$ 的方向为 x 轴正方向, 建立如图所示空间直角坐标系. (3 分)



因为 $PB = AB = 2$, 则 $B(1, 0, 0)$, $P(0, 0, \sqrt{3})$,

$M(-1, 1, 0)$, $C(1, 2, 0)$,

所以 $\overrightarrow{PC} = (1, 2, -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{BM} = (-2, 1, 0)$,

所以 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{BM} = 1 \times (-2) + 2 \times 1 + (-\sqrt{3}) \times 0 = 0$,

所以 $PC \perp BM$ (6 分)

(II) 由(I) 得, $\overrightarrow{PM} = (-1, 1, -\sqrt{3})$,

设平面 PBM 的法向量为 $m = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \overrightarrow{PM} \cdot m = 0, \\ \overrightarrow{BM} \cdot m = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x + y - \sqrt{3}z = 0, \\ -2x + y = 0, \end{cases}$

令 $x = 1$, 得 $m = \left(1, 2, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

设直线 PC 与平面 PBM 所成的角为 θ ,



$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{PC}, \mathbf{m} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{PC} \cdot \mathbf{m}|}{|\overrightarrow{PC}| |\mathbf{m}|} =$$

$$\frac{|1 \times 1 + 2 \times 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \times (-\sqrt{3})|}{\sqrt{1+4+\frac{1}{3}} \times \sqrt{1+4+3}} = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

所以直线 PC 与平面 PBM 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$ (12 分)

19. 解: (I) $\because c + b \sin\left(A + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{a}{2},$

$$\therefore 2c - 2b \cos A = a,$$

$$\text{由正弦定理得 } 2 \sin C = \sin A + 2 \sin B \cos A,$$

$$\therefore 2 \sin(A+B) = \sin A + 2 \sin B \cos A,$$

$$\therefore 2 \sin A \cos B = \sin A.$$

$$\because \sin A \neq 0, \therefore \cos B = \frac{1}{2}.$$

$$\text{又 } B \in (0, \pi), \therefore B = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore \frac{a+c}{\sin A + \sin C} = \frac{b}{\sin B} = 4\sqrt{2}. \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

$$(II) \because ac = 8, b = 2\sqrt{6},$$

由余弦定理得

$$b^2 = a^2 + c^2 - ac = (a+c)^2 - 3ac,$$

$$\therefore a+c = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{a+c}{ac} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

20. 解: (I) $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列,

$$a_1 a_2 a_3 = a_2^3 = 512, \therefore a_2 = 8.$$

设 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

$$\text{则 } a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{8}{q}, a_3 = a_2 q = 8q,$$

$$\therefore 8q = \frac{8}{q} + 12, \text{解得 } q = 2 \text{ 或 } q = -\frac{1}{2}.$$

由 $\{a_n\}$ 单调递增, 得 $q = 2$,

$$\text{故 } a_n = a_2 2^{n-2} = 2^{n-1}. \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

$$(II) b_n = a_n + 2n - 1 = 2^{n-1} + 2n - 1,$$

$$\therefore T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$= (2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}) + (1 + 3 + \dots + 2n - 1)$$

$$= \frac{4(1-2^n)}{1-2} + \frac{n(1+2n-1)}{2}$$

$$= 2^{n+2} + n^2 - 4. \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

21. 解: (I) 在正方形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$.

因为 $CD \subset$ 平面 $CDEF$, $AB \not\subset$ 平面 $CDEF$,

所以 $AB \parallel$ 平面 $CDEF$ (5 分)

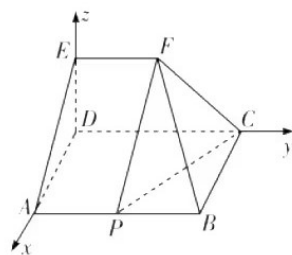
(II) 因为点 E, F 在平面 $ABCD$ 的射影落在 CD 上, 所以平面 $DCFE \perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $DE \perp DC$, 且平面 $ABCD \cap$ 平面 $DCFE = DC$, 所以 $DE \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 AD, DC, DE 两两垂直, 以 D 为坐标原点, DA, DC, DE 所在的直线分别为 x, y, z 轴,

建立如图所示的空间直角坐标系,

..... (7 分)



$$\text{则 } B(3, 3, 0), C(0, 3, 0), F(0, 1, 1),$$

$$P\left(3, \frac{3}{2}, 0\right), \text{所以 } \overrightarrow{FC} = (0, 2, -1),$$

$$\overrightarrow{FP} = \left(3, \frac{1}{2}, -1\right), \overrightarrow{BC} = (-3, 0, 0).$$

设平面 PCF 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{FC} \cdot \mathbf{m} = 0, \\ \overrightarrow{FP} \cdot \mathbf{m} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} 2y_1 - z_1 = 0, \\ 3x_1 + \frac{1}{2}y_1 - z_1 = 0, \end{cases}$$

令 $z_1 = 4$, 得 $\mathbf{m} = (1, 2, 4)$.

设平面 BCF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{BC} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{FC} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} -3x_2 = 0, \\ 2y_2 - z_2 = 0, \end{cases}$$

令 $y_2 = 1$, 得 $\mathbf{n} = (0, 1, 2)$.

设二面角 $P-FC-B$ 的平面角为 θ ,

$$\text{则} \cos \theta = \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{2\sqrt{105}}{21},$$

由图知 θ 为锐角, 故二面角 $P-FC-B$ 的余

弦值为 $\frac{2\sqrt{105}}{21}$ (12 分)

22. 解: (I) 由题意得 $f(x) = \ln x - ax + 1 \leq 0$ 恒

成立, 即 $a \geq \frac{\ln x + 1}{x}$ 恒成立.

令 $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x} (x > 0)$, 则 $g'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) > 0$;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore g(x)_{\max} = g(1) = 1, a \geq g(x)_{\max} = 1$,

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

..... (5 分)

(II) 由 (I) 知, $x - 1 \geq \ln x$, $x = 1$ 时取等号,

令 $x = \frac{n+1}{n} (n \in \mathbf{N}^+)$, 得 $\frac{1}{n} > \ln \frac{n+1}{n}$,

$\therefore 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} +$

$\ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times$

$\frac{n+1}{n} \right) = \ln(n+1),$

即 $n \in \mathbf{N}^+$ 时, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1).$

..... (12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线