

数学试卷

注意事项：

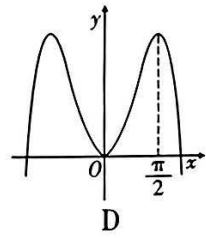
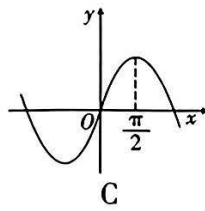
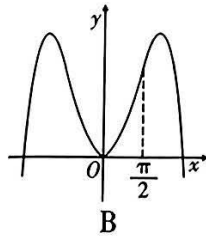
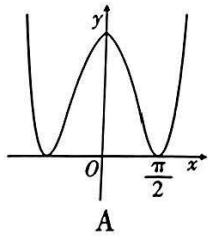
1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚。
2. 每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。在试题卷上作答无效。
3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。满分 150 分，考试用时 120 分钟。

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A = \{x | y = \ln(1-x)\}$ ， $B = \{x | \frac{x-1}{x} \leq 0\}$ ，则 $A \cap B =$
 - A. $\{x | 0 < x < 1\}$
 - B. $\{x | 0 \leq x < 1\}$
 - C. $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$
 - D. $\{x | 0 < x \leq 1\}$

2. 若 $x \in \mathbf{R}$ ，则“ $x > 0$ ”是“ $\frac{x^2+1}{x} \geq 2$ ”的
 - A. 充分不必要条件
 - B. 必要不充分条件
 - C. 充要条件
 - D. 既不充分也不必要条件
3. 若随机变量 $X \sim N(10, 2^2)$ ，则下列选项错误的是
 - A. $P(X \geq 10) = 0.5$
 - B. $P(X \leq 8) + P(X \leq 12) = 1$
 - C. $P(8 \leq X \leq 12) = 2P(8 \leq X \leq 10)$
 - D. $D(2X+1) = 8$

4. 函数 $f(x) = \frac{(x^2+1)\sin|x|}{e^2}$ 的图象大致为



5. 若函数 $f(x) = ax^2 + 2(a-1)x + 2$ 在 $(-\infty, 4)$ 上为减函数，则 a 的取值范围为
 - A. $(\frac{1}{5}, +\infty)$
 - B. $(0, \frac{1}{5}]$
 - C. $(-\infty, \frac{1}{5}]$
 - D. $[0, \frac{1}{5}]$

6. 若过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点作双曲线的一条渐近线的垂线，垂线交 y 轴于点 $(0, 3c)$ (c 为双曲线的半焦距)，则此双曲线的离心率是
- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{3}$ D. $\sqrt{10}$
7. 若 $2^a + \log_2 a < 2^{2b} + \log_2 b + 1$ ，则
- A. $\ln(2b - a + 1) > 0$ B. $\ln(2b - a + 1) < 0$
C. $\ln|a - 2b| > 0$ D. $\ln|a - 2b| < 0$
8. 已知可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，若对任意的 $x \in \mathbf{R}$ ，都有 $f'(x) - f(x) < 1$ ，且 $f(0) = 2022$ ，则不等式 $f(x) + 1 > 2023e^x$ 的解集为
- A. $(0, +\infty)$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(-\infty, \frac{1}{e})$ D. $(-\infty, 1)$

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多个选项是符合题目要求的，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分）

9. 甲罐中有 5 个红球，2 个白球和 3 个黑球，乙罐中有 4 个红球，3 个白球和 3 个黑球。先从甲罐中随机取出一球放入乙罐，分别以 A_1, A_2 和 A_3 表示从甲罐取出的球是红球、白球、黑球，再从乙罐中随机取出一球，以 B 表示从乙罐取出的球是红球。则下列结论中正确的是
- A. $P(B) = \frac{2}{5}$ B. $P(B|A_2) = \frac{4}{11}$
C. 事件 B 与事件 A_1 相互独立 D. A_1, A_2, A_3 两两互斥
10. 提丢斯·波得定律是关于太阳系中行星轨道的一个简单的几何学规则，它是在 1766 年由德国的一位中学老师戴维斯·提丢斯发现的，后来被柏林天文台的台长波得归纳成一条定律，即数列 $\{a_n\}$: 0.4, 0.7, 1, 1.6, 2.8, 5.2, 10, 19.6... 表示的是太阳系第 n 颗行星与太阳的平均距离(以天文单位 AU 为单位)。现将数列 $\{a_n\}$ 的各项乘以 10 后再减 4，得到数列 $\{b_n\}$ ，可以发现数列 $\{b_n\}$ 从第 3 项起，每项是前一项的 2 倍，则下列说法正确的是
- A. 数列 $\{b_n\}$ 的第 2023 项为 3×2^{2023}
B. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 0.3 \times 2^{n-2} + 0.4$
C. 数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和为 157.3
D. 数列 $\{nb_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = 3(n-1) \cdot 2^{n-1}$

11. 定义在 $(-1, 1)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)$, 且当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f(x) < 0$, 则下列说法正确的有
- A. $f(0) = 0$
- B. $f(x)$ 为奇函数
- C. $f(x)$ 为增函数
- D. $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) < f\left(\frac{7}{9}\right)$
12. 双曲线具有如下光学性质: 如图 1, F_1, F_2 是双曲线的左、右焦点, 从 F_2 发出的光线 m 射在双曲线右支上一点 P , 经点 P 反射后, 反射光线的反向延长线过 F_1 ; 当 P 异于双曲线顶点时, 双曲线在点 P 处的切线平分 $\angle F_1PF_2$. 若双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, 则下列结论正确的是

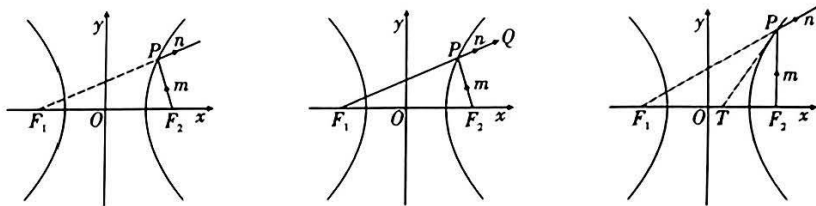


图 1

- A. 射线 n 所在直线的斜率为 k , 则 $|k| \in \left[0, \frac{3}{4}\right)$
- B. 当 $m \perp n$ 时, $|PF_1| \cdot |PF_2| = 36$
- C. 当 n 过点 $Q(7, 5)$ 时, 光线由 F_2 到 P 再到 Q 所经过的路程为 5
- D. 若点 T 坐标为 $(1, 0)$, 直线 PT 与 C 相切, 则 $|PF_2| = 16$
- 三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)
13. $(x-2y+1)^6$ 展开式中含 x^2y^3 项的系数为_____.
14. 已知函数 $y = \log_a(4x-1) + 2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 过定点 P , 且定点 P 在直线 $l: ax+by-3=0$ ($b > 0$) 上, 则 $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{4b}$ 的最小值为_____.
15. 已知函数 $f(x) = x \ln x - \frac{1}{4}(m-1)x^2 - x + 1$ 有两个极值点, 则实数 m 的取值范围为_____.



16. “雪花曲线”是瑞典数学家科赫在 1904 年研究的一种分形曲线. 如图 2 是“雪花曲线”的一种形成过程: 从一个正三角形开始, 把每条边分成三等份, 然后以各边的中间一段为底边分别向外作正三角形, 再去掉底边, 重复进行这一过程.

附:

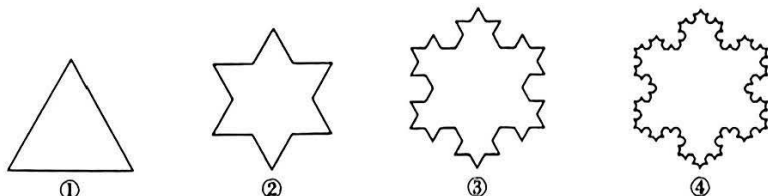


图 2

如图, 若第 1 个图中三角形的边长为 1, 则第 3 个图形的周长为 _____; 第 n 个图形的面积为 _____.

四、解答题 (共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

19.

17. (本小题满分 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1 = \frac{1}{3}$, 且满足 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2-a_n}$.

- (1) 求证: 数列 $\left\{\frac{1}{a_n} - 1\right\}$ 为等比数列;
 (2) 若 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 2024$, 求满足条件的最大整数 n .

18. (本小题满分 12 分)

某网红冰淇淋公司计划在贵阳市某区开设分店, 为了确定在该区开设分店的个数, 该公司对该市已开设分店的 5 个区域的数据作了初步处理后得到下列表格, 记 x 表示在 5 个区域开设分店的个数, y 表示这 x 个分店的年收入之和.

x (个)	1	2	3	4	5
y (千万元)	1	1.6	2	2.4	3

- (1) 该公司经过初步判断, 可用经验回归模型拟合 y 与 x 的关系, 求 y 关于 x 的经验回归方程;
 (2) 如果该公司最终决定在该区选择两个合适的地段各开设一个分店, 根据市场调查得到如下统计数据: 第一分店每天的顾客平均为 300 人, 其中 180 人会购买该品牌冰淇淋, 第二分店每天的顾客平均为 200 人, 其中 150 人会购买该品牌冰淇淋. 依据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 分析两个店的顾客购买率有无差异.

曲
中

α	0.010	0.005	0.001
x_α	6.635	7.879	10.828

参考公式： $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$, $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(c+d)(b+d)}$, $n = a+b+c+d$.

}

19. (本小题满分 12 分)

如图 3, 已知圆柱的轴截面 $ABCD$ 为正方形, E, F 为圆弧 AB 上的两个三等分点, EH, FG 为母线, P, Q 分别为线段 AD, FG 上的动点(与端点不重合), 经过 C, P, Q 的平面 α 与线段 EH 交于点 M .

(1) 证明: $CP \parallel MQ$;

(2) 当 $AP = GQ$ 时, 求平面 α 与圆柱底面 O 所成夹角的正弦值的最小值.

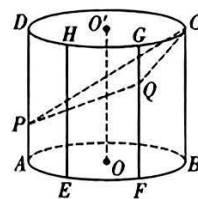


图 3

20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2x^3 - 3x$.

(1) 求函数 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程;

(2) 若过点 $P(-1, t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切, 求 t 的取值范围;

(3) 请问过点 $A(0, 0), B(-1, -1), C(-1, 3), D(1, -1), E(1, -2)$ 分别存在几条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切? (请直接写出结论, 不需要证明)

21. (本小题满分 12 分)

马尔科夫链是概率统计中的一个重要模型, 因俄国数学家安德烈·马尔科夫得名, 其过程具备“无记忆”的性质, 即第 $n+1$ 次状态的概率分布只跟第 n 次的状态有关, 与第 $n-1, n-2, n-3, \dots$ 次状态无关, 即 $P(X_{n+1} | \dots, X_{n-2}, X_{n-1}, X_n) = P(X_{n+1} | X_n)$. 已知甲盒子中装有 2 个黑球和 1 个白球, 乙盒子中装有 2 个白球, 现从甲、乙两个盒子中各任取一个球交换放入另一个盒子中, 重复 n 次这样的操作. 记甲盒子中黑球个数为 X_n , 恰有 2 个黑球的概率为 a_n , 恰有 1 个黑球的概率为 b_n .

(1) 求 a_1, b_1 和 a_2, b_2 ;

(2) 证明: $\left\{2a_n + b_n - \frac{6}{5}\right\}$ 为等比数列 ($n \geq 2$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$);

(3) 求 X_n 的期望 (用 n 表示, $n \geq 2$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$).

22. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 过焦点的直线 l 与抛物线 C 交于两点 A, B , 当直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ 时, $|AB| = 16$.

(1) 求抛物线 C 的标准方程和准线方程;

(2) 记 O 为坐标原点, 直线 $x = -2$ 分别与直线 OA, OB 交于点 M, N , 求证: 以 MN 为直径的圆过定点, 并求出定点坐标.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

