2023年春达州市普通高中二年级期末质量监测

理科数学参考答案及评分参考

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解答与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制定相应的评分细则。

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再得分。

3．解答右端所注分数，表示该生正确做到这一步应该得的累加分数。

4．只给整数分数。选择题不给中间分。

一．选择题： 1．A　2．C　3．B　4．A　5．B　6．B
7．C　8．C　9．D　10．D　11．D　12．C

二．填空题： 13．$\underline{7}$　14．$\underline{13x-y-18=0}$　15．$\underline{2\sqrt{6}}$　16．$\underline{c<a<b}$

三．解答题：

17．解：(1)由等差数列$\{a_n\}$前五项和为15，得$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5a_3=15$，所以$a_3=3$．……1分

又$a_1=1$，所以$\{a_n\}$公差为1，……2分

所以$a_n=n$．……3分

由等比数列$\{b_n\}$的前三项积为8，得$b_1b_2b_3=b_2^3=8$，得$b_2=2$．……4分

又$b_1=1$，所以$\{b_n\}$公比为2，……5分

所以$b_n=2^{n-1}$．……6分

(2) $c_n=a_nb_n=n\cdot 2^{n-1}$，……7分

$S_n=1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}$，……8分

则$2S_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$，……9分

作差得$-S_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^n$，……10分

所以$S_n=(n-1)\cdot 2^n+1$．……12分

18．解：(1)由题意可得选考物理和政治的情况的2×2列联表：

	选考政治的人数	没选考政治的人数	合计
选考物理的人数	80	40	120
没选考物理的人数	70	10	80
合计	150	50	200

……2分

K^2的观测值$k=\dfrac{200\times(80\times 10-40\times 70)^2}{120\times 80\times 150\times 50}\approx 11.11>10.828$．……4分

所以可以在犯错误概率不超过0.1%的前提下，认为选择物理与选择政治有关．……6分

(2)物理和政治都选的概率为$\frac{2}{5}$，X 的取值可以是 0，1，2，3． ……………………………8 分

$X \sim B(3,\frac{2}{5})$，X 的分布列为

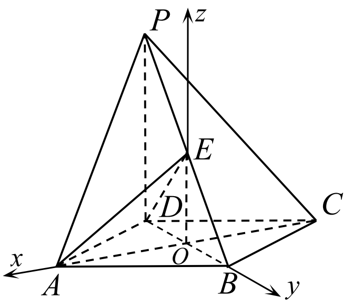
X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

……………………………………………10 分

X 的期望为 $E(X)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$． ………………………………………………………12 分

19．解：(1)∵底面 $ABCD$ 是菱形，∴ $AD=DC$．

又∵ $PA=PC$，$PD=PD$，∴ $\triangle PDA\cong\triangle PDC$．



∵ $PD\perp AD$，∴ $PD\perp DC$． ………………………………2 分

∵ $AD\cap DC=D$，$AD\subset$面$ABCD$，$CD\subset$面$ABCD$

∴ $PD\perp$面$ABCD$． ……………………………………………3 分

∵ $AC\subset$面$ABCD$，∴ $PD\perp AC$． ………………………………4 分

∵底面 $ABCD$ 是菱形，∴ $AC\perp BD$．

∵ $PD\cap BD=D$，∴ $AC\perp$面PBD． ……………………………5 分

∵ E 为 PB 中点，$DE\subset$面PBD，

所以 $AC\perp DE$． ……………………………………………………………………6 分

（2）连接 BD 交 AC 于 O，连接 OE．

因 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，所以 $BD=2$，$AC=2\sqrt{3}$．

∵因 PB 与底面 $ABCD$ 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$PD\perp$面$ABCD$，∴ $\angle PBD=\frac{\pi}{4}$，$PD=2$．…7 分

又 E 为 PB 中点，O 为 BD 中点，则 $PD\parallel OE$，∴则 $OE\perp$平面$ABCD$．以 O 为坐标原点，以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OE}$ 方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$．

则 $A(\sqrt{3},0,0)$，$D(0,-1,0)$，$E(0,0,1)$，$P(0,-1,2)$．

∴ $\overrightarrow{AE}=(-\sqrt{3},0,1)$，$\overrightarrow{AP}=(-\sqrt{3},-1,2)$，$\overrightarrow{AD}=(-\sqrt{3},-1,0)$．

设平面 PAE 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-\sqrt{3}x+z=0,\\ -\sqrt{3}x-y+2z=0\end{cases}$，令 $x=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$． ………………10 分

同理可得平面 AED 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$． ………………………………11 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{7}$， 因二面角 $P-AE-D$ 的平面角为锐角，所以二面角 $P-AE-D$ 的余弦值为$\frac{1}{7}$． ……………………………………………………12 分

20．解：(1)由题意知 $F(\frac{p}{2},0)$． ……………………………………………………………1 分

设横坐标为 x_M，由 M 到焦点 F 的距离比 M 到 y 轴的距离大 1，得

$\left|MF\right|=x_M+\frac{p}{2}=x_M+1$，∴ $p=2$． ……………………………………………………………3 分

所以抛物线的标准方程为 $y^2=4x$． ……………………………………………………………4 分

(2)由题意知 $F(1,0)$，直线 l_1，l_2 斜率均存在且不为 0，设直线 l_1 的方程 $y=k(x-1)$，

将 $y=k(x-1)$ 代入 $y^2=4x$ 得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$．

设 $A(x_1,\ y_1)$，$C(x_2,\ y_2)$，则 $x_1+x_2=2+\frac{4}{k^2}$，$x_1x_2=1$， ……………………………6 分

∴ $\left|AC\right|=x_1+x_2+p=4+\frac{4}{k^2}$， ……………………………………………………………7 分

∵ $l_1\perp l_2$，∴ l_2 的方程 $y=-\frac{1}{k}(x-1)$，同理可得 $\left|BD\right|=4+4k^2$． ……………………………9 分

四边形 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\left|AC\right|\cdot\left|BD\right|=\frac{1}{2}(4+\frac{4}{k^2})(4+4k^2)=8(k^2+\frac{1}{k^2}+2)\geqslant 32$，当且仅当 $k^2=\frac{1}{k^2}$

即 $k=\pm 1$ 时，等号成立．……………………………………………………………………11 分

所以四边形 $ABCD$ 的面积的最小值为 32．…………………………………………………………12 分

21．解：(1) $f(x)=2\ln x-ax$，知 $x>0$，$f'(x)=\frac{2}{x}-a=\frac{2-ax}{x}$． ……………………………1 分

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为单调递增函数． …………………………………………2 分

当 $a>0$ 时，若 $x\in(0,\frac{2}{a})$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 为单调递增函数，若 $x\in(\frac{2}{a},+\infty)$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 为单调递减函数． ……………………………………………………………………4 分

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,+\infty)$，无单调递减区间；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,\frac{2}{a})$，单调递减区间是 $(\frac{2}{a},+\infty)$． ……………………………………5 分

(2) $g(x)=xf(x)=2x\ln x-ax^2$，∴ $x>0$，$g'(x)=2(\ln x-ax+1)$． ……………………………6 分

令 $g'(x)=0$，得 $\ln x=ax-1$，结合 $y=\ln x$ 和 $y=ax-1$ 函数图象知，当 $a\leqslant 0$ 时，存在 x_0 使得 $g'(x_0)=0$，且 $x\in(0,\ x_0)$，则 $g'(x)<0$，$g(x)$ 为单调递减函数，$x\in(x_0,+\infty)$ 时，则 $g'(x)>0$，$g(x)$ 为单调递增函数，x_0 为极小值点，不符合题意． ……………………………………………8 分

当 $a>0$ 时，$y=\ln x$ 在 $x=1$ 处的切线是 $y=x-1$，$y=ax-1$ 恒过 $(0,\ -1)$，函数 $g(x)$ 存在极大值点 x_0，即直线 $y=ax-1$ 与曲线 $y=\ln x$ 有两个交点，其中 x_0 为位于第一象限交点的横坐标，所以 $0<a<1$，$ax_0-1>0$，即 $a>\frac{1}{x_0}$． ……………………………………………………………9 分

∵ $\ln x_0=ax_0-1$，∴ $ax_0=\ln x_0+1$．由 $g(x_0)>\mathrm{e}^2$，得 $2x_0\ln x_0-ax_0{}^2>\mathrm{e}^2$，∴ $x_0\ln x_0-x_0>\mathrm{e}^2$．由于 $\varphi(x)=x\ln x-x$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且 $\varphi(\mathrm{e}^2)=\mathrm{e}^2$，∴ $x_0>\mathrm{e}^2$，∴ $a=\frac{\ln x_0+1}{x_0}>\frac{\ln \mathrm{e}^2+1}{x_0}=\frac{3}{x_0}>\frac{1}{x_0}$． ……………………………………………………………………10 分

构造$h(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}(x>\mathrm{e}^2)$，$\because h'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$，$\therefore$当$x\in(\mathrm{e}^2,+\infty)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，故$a<h(\mathrm{e}^2)=\dfrac{3}{\mathrm{e}^2}$. ……11分

所以实数a的取值范围是$(0,\dfrac{3}{\mathrm{e}^2})$. ……12分

22．解：(1)由l过点$P(3,1)$且倾斜角为α，得l的参数方程为$\begin{cases}x=3+t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}(t为参数)$. ……2分

C的方程$(x-3)^2+y^2=4$可化为$x^2+y^2-6x+5=0$，将$x^2+y^2=\rho^2$，$x=\rho\cos\theta$代入这个方程得C的极坐标方程为$\rho^2-6\rho\cos\theta+5=0$. ……5分

(2)将直线l的参数方程$\begin{cases}x=3+t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$代入$(x-3)^2+y^2=4$，整理得$t^2+2t\sin\alpha-3=0$. ……6分

设方程A，B两点对应的参数分别为t_1，t_2，则$t_1+t_2=-2\sin\alpha$，$t_1t_2=-3$. ……7分

$\therefore \dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}=\dfrac{|PA|+|PB|}{|PA|\cdot|PB|}=\dfrac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1t_2|}=\dfrac{\sqrt{4\sin^2\alpha+12}}{3}\geqslant\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，等号在$\alpha=0$时成立. ……9分

故$\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}$的最小值为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. ……10分

23．解：(1) $f(x)=2|x-1|+|2x+1|=|2x-2|+|2x+1|\geqslant|(2x-2)-(2x+1)|=3$，当且仅当$(x-1)(2x+1)\leqslant 0$，即$-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$时取等号. ……4分

所以$k=3$. ……5分

(2)由$3a+2b+c=k$，得$3a+2b+c=3$， ……6分

由柯西不等式有$(a^2+b^2+c^2)(3^2+2^2+1^2)\geqslant(3a+2b+c)^2=9$，得$a^2+b^2+c^2\geqslant\dfrac{9}{14}$，当且仅当$\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{c}{1}$，且$3a+2b+c=3$，即$a=\dfrac{9}{14}$，$b=\dfrac{3}{7}$，$c=\dfrac{3}{14}$时取等号. ……9分

所以$a^2+b^2+c^2$的最小值为$\dfrac{9}{14}$. ……10分