

## 2021年秋季高三数学（理）开学摸底考试卷 01

班级\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 分数\_\_\_\_\_

(考试时间：120分钟 试卷满分：150分)

一. 选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合  $A = \left\{ x \mid \frac{x+2}{x-1} \leq 0 \right\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - x - 2 < 0\}$ , 则  $A \cap B =$

- A.  $[-2, 2)$       B.  $(-1, 1]$       C.  $(-1, 1)$       D.  $(-1, 2)$

2. 若虚数  $z$  满足  $z(1+i) = |z|^2$ , 则  $z =$

- A.  $1-i$       B.  $1+i$       C.  $-1-i$       D.  $-1+i$

3. 已知命题  $p: \forall k \in (1, 2)$ , 方程  $\frac{x^2}{2-k} - \frac{y^2}{k-1} = 1$  都表示双曲线;  $q$ : 抛物线  $y = 4x^2$  的焦点坐标为  $(1, 0)$ ;

下列判断正确的是

- A.  $p$  是假命题      B.  $q$  是真命题  
C.  $p \wedge (\neg q)$  是真命题      D.  $(\neg p) \wedge q$  是真命题

4. 下列函数为奇函数的是

- A.  $f(x) = x^3 + 3x^2$       B.  $f(x) = 2^x + 2^{-x}$   
C.  $f(x) = x \sin x$       D.  $f(x) = \ln \frac{3+x}{3-x}$

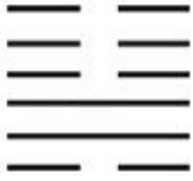
5. 已知  $a = 2^{\sqrt{3}}$ ,  $b = \sqrt{3}$ ,  $c = \log_2 3$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为( )

- A.  $b > a > c$       B.  $a > c > b$       C.  $a > b > c$       D.  $b > c > a$

6. 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 异面直线  $AB_1$  与  $BD$  的夹角为

- A.  $\frac{\pi}{2}$       B.  $\frac{\pi}{3}$       C.  $\frac{\pi}{4}$       D.  $\frac{\pi}{6}$

7. 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化. 每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成, 爻分为阳爻“——”和阴爻“— —”, 如图就是一重卦. 如果某重卦中有 3 个阳爻, 3 个阴爻, 则它可以组成 \_\_\_\_\_ 种重卦.



- A. 6                      B. 15                      C. 20                      D. 1

8. 将函数  $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{6})$  的图象上各点的横坐标伸长到原来的 6 倍 (纵坐标不变), 再将所得到的图象向右平移  $m(m > 0)$  个单位长度, 得到函数  $g(x)$  的图象. 若  $g(x)$  为奇函数, 则  $m$  的最小值为

- A.  $\frac{\pi}{18}$                       B.  $\frac{\pi}{9}$                       C.  $\frac{\pi}{6}$                       D.  $\frac{\pi}{3}$

9. 在圆  $x^2 + y^2 = 4$  内任取一点, 则该点到直线  $x + y - 2\sqrt{2} = 0$  的距离小于 1 的概率为

- A.  $\frac{1}{3}$                       B.  $\frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi}$                       C.  $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$                       D.  $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$

10. 已知函数  $f(x) = x \ln x - \frac{1}{2}(m+1)x^2 - x$  有两个极值点, 则实数  $m$  的取值范围为

- A.  $(-\frac{1}{e}, 0)$                       B.  $(-1, \frac{1}{e} - 1)$                       C.  $(-\infty, \frac{1}{e} - 1)$                       D.  $(-1, +\infty)$

11. 已知  $O$  为椭圆  $C$  的中心,  $F$  为  $C$  的一个焦点, 点  $M$  在  $C$  外,  $\overrightarrow{MO} = 3\overrightarrow{OF}$ , 经过  $M$  的直线  $l$  与  $C$  的一个交点为  $N$ ,  $\triangle MNF$  是有一个内角为  $120^\circ$  的等腰三角形, 则  $C$  的离心率为

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$                       B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       C.  $\sqrt{3} - 1$                       D.  $\frac{\sqrt{3} + 1}{4}$

12. 已知函数  $f(x) = e^{|x|} - \frac{1}{2}$ ,  $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x \leq 0 \\ (x-1)\ln x, & x > 0 \end{cases}$ . 若关于  $x$  的方程  $g(f(x)) - m = 0$  有四个不同的解, 则

实数  $m$  的取值集合为 ( )

- A.  $(0, \frac{\ln 2}{2})$                       B.  $(\frac{\ln 2}{2}, 1)$                       C.  $\{\frac{\ln 2}{2}\}$                       D.  $(0, 1)$

**二. 填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.**

13. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过  $F_2$  的直线  $l$  交  $C$  的右支于  $A, B$  两点, 且  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF_1} = 0$ ,  $12|\overrightarrow{AB}| = 5|\overrightarrow{AF_1}|$ , 则  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.

14. 已知向量  $\vec{a} = (2, 3)$ ,  $\vec{b} = (-1, m)$ , 且  $\vec{a}$  与  $\vec{a} + \vec{b}$  垂直, 则  $m =$ \_\_\_\_\_.

15. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $B = \frac{\pi}{3}$ ,  $a = 2$ ,  $b = \sqrt{3}$ , 则  $\triangle ABC$  的面积为\_\_\_\_\_.

16. 将满足  $\begin{cases} 2x+y-3 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \leq -1 \end{cases}$  的封闭图形绕  $y$  轴旋转一周所得的几何体的主视图面积为\_\_\_\_\_.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。（一）必考题：共 60 分。

17. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ， $a_1 = 1$ ， $\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{n-1} + \frac{a_n}{n} = n(n-2)$ ， $n \in \mathbb{N}^*$ 。

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式；

(2) 若  $a_1, a_k, S_{k+2}$  成等比数列， $k \in \mathbb{N}^*$ ，求  $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_k}$  的值。

18. 某工厂的工人生产内径为  $25.40\text{mm}$  的一种零件，为了了解零件的生产质量，从该厂的 1000 件零件中抽出 50 件，测得其内径尺寸如下（单位： $\text{mm}$ ）：

$25.41 \times 8$   $25.42 \times 6$   $25.40 \times 4$   $25.38 \times 11$

$25.39 \times 8$   $25.44 \times 1$   $25.43 \times 7$   $25.37 \times 5$

这里用  $x \times n$  表示有  $n$  件尺寸为  $x\text{mm}$  的零件。

(1) 求这 50 件零件内径尺寸的平均数  $\bar{x}$ ；

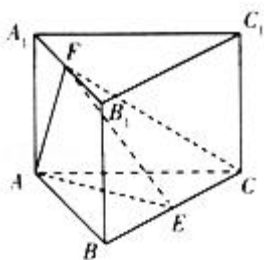
(2) 设这 50 件零件内径尺寸的方差为  $s^2$ ，试估计该厂 1000 件零件中其内径尺寸在  $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$  内的件数。

参考数据：取  $\sqrt{4.16} = 2.04$ 。

19. 如图，在正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中， $AC = 2AA_1 = 4$ ， $E, F$  分别是  $BC, A_1B_1$  的中点。

(I) 求证： $EF \parallel$  平面  $ACC_1A_1$ ；

(II) 求二面角  $A - EF - C$  的余弦值。



20. 设  $O$  为坐标原点，抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ ，点  $M(a, 4)$  在  $C$  上， $|MF| = 4$ 。

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 过点  $F$  的直线  $l$  与  $C$  交于  $A, B$  两点, 若  $l$  与圆  $H: (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$  相切, 求  $\triangle AOB$  的面积.

21. 已知函数  $f(x) = a \ln x + \frac{a-1}{x} - x$ , 其中  $a > 0$ .

(1) 讨论函数  $f(x)$  的极值;

(2) 设  $m \in \mathbb{Z}$ , 当  $a=1$  时, 若不等式  $f(x) < m - (x-2)e^x$  对任意  $x \in (0, 1]$  恒成立, 求  $m$  最小值.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.[选修

4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

22. 以直角坐标原点  $O$  为极点, 以  $x$  轴正半轴为极轴, 建立极坐标系, 并在两种坐标系中取相同的长

度单位, 已知曲线  $C_1$  的极坐标方程为  $\rho = 4 \cos \theta$ , 曲线  $C_2$  的参数方程为  $\begin{cases} x = m + t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$  ( $t$  为参数  $0 \leq t < \pi$ ),

射线  $\theta = \varphi, \theta = \varphi + \frac{\pi}{4}, \theta = \varphi - \frac{\pi}{4}$  分别与曲线  $C_1$  交于极点  $O$  外的三点  $A, B, C$ .

(1) 求  $\frac{|OB| + |OC|}{|OA|}$  的值;

(2) 当  $\varphi = \frac{\pi}{12}$  时,  $B, C$  两点在曲线  $C_2$  上, 求  $m$  与  $\alpha$  的值.

23. 已知函数  $f(x) = |x-a| + |x+2b|$  ( $a > 0, b > 0$ ).

(1) 若  $a=1, b=1$ , 求不等式  $f(x) \leq 5$  的解集;

(2) 设函数  $f(x)$  的最小值为  $m$ , 当  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$  时, 求  $m$  的取值范围.

扫码关注学科网数学服务号，获取优质数学教育资源

