

河北省衡水中学 2023 届上学期高三年级一调考试

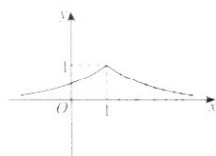
数 学

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。共 4 页，总分 150 分，考试时间 120 分钟。

第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合  $A = \{x | x^2 - 3x < 0\}$ ， $B = \{x | 3^x \geq \sqrt{3}\}$ ，则  $A \cap B =$   
 A.  $(0, \frac{1}{2})$       B.  $[\frac{1}{2}, 3)$       C.  $(0, \sqrt{2})$       D.  $(1, 3)$
- 若  $a = 5^{0.1}$ ， $b = \frac{1}{2} \log_2 3$ ， $c = \log_3 0.8$ ，则  $a, b, c$  的大小关系为  
 A.  $a > b > c$       B.  $b > a > c$       C.  $c > b > a$       D.  $c > a > b$
- 设  $a, b \in R$ ，则使  $a > b$  成立的一个充分不必要条件是  
 A.  $a^3 > b^3$       B.  $\log_2(a-b) > 0$       C.  $a^2 > b^2$       D.  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
- 我国古代数学家李善兰在《对数探源》中利用尖锥术理论来制作对数表，他通过“对数积”求得  $\ln 2 \approx 0.693$ ， $\ln \frac{5}{4} \approx 0.223$ ，由此可知  $\ln 0.2$  的近似值为  
 A. -1.519      B. -1.726      C. -1.609      D. -1.316
- 已知  $y$  关于  $x$  的函数图象如图所示，则实数  $x, y$  满足的关系式可以是



- |                                     |                              |
|-------------------------------------|------------------------------|
| A. $ x-1  - \log_3 \frac{1}{y} = 0$ | B. $2^x - 1 = \frac{x^3}{y}$ |
| C. $2^{ x-1 } - y = 0$              | D. $\ln  x  = y - 1$         |
- 已知函数  $f(x)$  是定义在  $R$  上的单调函数。若对任意  $x \in R$ ，都有  $f[f(x) - 2^x] = 3$ ，则  $f(4) =$

- A. 9                      B. 15                      C. 17                      D. 33
7. 已知函数  $f(x) = \frac{6}{e^x + 1} + \frac{mx}{|x| + 1}$  的最大值为  $M$ ，最小值为  $N$ ，则  $M + N =$
- A. 3    B. 4  
C. 6    D. 与  $m$  值有关
8. 已知正实数  $x, y$  满足  $(2x + \sqrt{4x^2 + 1})(\sqrt{y^2 + 1} - 1) = y$ ，则  $x + 2y$  的最小值为
- A. 1                      B. 2                      C. 4                      D.  $\frac{3}{2}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知集合  $U$  为全集，集合  $A, B, C$  均为  $U$  的子集，若  $A \cap B = \emptyset$ ， $A \cap C \neq \emptyset$ ， $B \cap C \neq \emptyset$ ，则
- A.  $A \subseteq C \cup (B \cap C)$                       B.  $C \subseteq C \cup (A \cup B)$   
C.  $A \cup B \cup C = U$                       D.  $A \cap B \cap C = \emptyset$
10. 已知定义域为  $I$  的偶函数  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增，且  $\exists x \in I$ ，使  $f(x) < 0$ ，则下列函数中符合上述条件的是
- A.  $f(x) = x^2 - 3$                       B.  $f(x) = 2^x + 2^{-x}$   
C.  $f(x) = \log_2 |x|$                       D.  $f(x) = x - \frac{1}{x}$
11. 记  $\triangle ABC$  的三边长分别为  $a, b, c$ ，且  $abc = 2$ ，则下列结论正确的是
- A.  $a^2 b < 2 + ab^2$                       B.  $ab + a + b > 2\sqrt{2}$   
C.  $a + b^2 + c^2 \geq 4$                       D.  $a + b + c \leq 2\sqrt{2}$

12. 某公司通过统计分析发现，工人工作效率  $E$  与工作年限  $r (r > 0)$ 、劳累程度  $T (0 < T < 1)$ 、劳动动机  $b (b > 1)$  相关，并建立了数学模型  $E = 10 - 10T \cdot b^{-0.14r}$ 。已知甲、乙为该公司的员工，下列结论正确的是
- A. 若甲与乙劳动动机相同，且甲比乙工作年限长、劳累程度弱，则甲比乙工作效率高  
B. 若甲与乙劳累程度相同，且甲比乙工作年限长、劳动动机高，则甲比乙工作效率低  
C. 若甲与乙劳动动机相同，且甲比乙工作效率高、工作年限短，则甲比乙劳累程度弱  
D. 若甲与乙工作年限相同，且甲比乙工作效率高、劳动动机低，则甲比乙劳累程度强

第II卷（非选择题 共90分）

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 若命题“ $\exists x \in [1, 3], x^2 + ax + 1 > 0$ ”是假命题，则实数  $a$  的最大值为\_\_\_\_\_.
14. 高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的美誉，用其名字命名了“高斯函数”. 设  $x \in \mathbb{R}$ , 用  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 则  $y = [x]$  称为高斯函数, 也称取整函数, 例如:  $[-1.3] = -2, [3.4] = 3$ . 已知  $f(x) = \frac{1}{3^x + 1} - \frac{1}{3}$ , 则函数  $y = [f(x)]$  的值域为\_\_\_\_\_.
15. 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数,  $f(x-1)$  为偶函数, 且当  $0 < x \leq 1$  时,  $f(x) = \log_2(2x)$ , 则  $f(21) =$ \_\_\_\_\_.
16. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \geq a, \\ e^x - 1, & x < a \end{cases} (a \in \mathbb{R})$ . 若函数  $g(x) = f(f(x) + 1)$  有三个零点, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)
- 已知函数  $f(x) = |x^2 - x|$ .
- (1) 求不等式  $f(x) < 2$  的解集;
- (2) 若对任意  $x \geq 0$ , 不等式  $f(x) - 2x + m > 0$  恒成立, 求实数  $m$  的取值范围.
18. (12分)
- 已知函数  $f(x) = \log_2(2+x) - \log_2(2-x)$ .
- (1) 判断  $f(x)$  的奇偶性, 并说明理由;
- (2) 若关于  $x$  的方程  $f(x) = \log_2(a+x)$  有两个不同的实数根, 求实数  $a$  的取值范围.
19. (12分)
- 设  $a, b, c$  为正实数, 且  $a+b+c=1$ . 证明:
- (1)  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2}$ ;

$$(2) a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{ab+bc+ca-3abc}{2}.$$

20. (12分)

已知函数  $f(x) = \frac{1}{2^x + 1} (x \in R)$ .

(1) 已知  $f(x)$  的图象存在对称中心  $(a, b)$  的充要条件是  $g(x) = f(x+a) - b$  的图象关于原点中心对称, 证明:  $f(x)$  的图象存在对称中心, 并求出该对称中心的坐标;

(2) 若对任意  $x_1 \in [1, n]$ , 都存在  $x_2 \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$  及实数  $m$ , 使得  $f(1-mx_1) + f(x_1x_2) = 1$ , 求实数  $n$  的最大值.

21. (12分)

经过市场调研发现, 某企业生产的某种时令商品在未来一个月 (30 天) 内的日销售量  $m(t)$  (单位: 百件) 与时间第  $t$  天的关系如下表所示:

第 $t$ 天	1	3	10	...	30
日销售量 $m(t)$ / 百件	2	3	6.5	...	16.5

未来 30 天内, 受市场因素影响, 前 15 天此商品每天每件的利润  $f_1(t)$  (单位: 元) 与时间第  $t$  天的函数关系式为  $f_1(t) = -3t + 88 (1 \leq t \leq 15, \text{且 } t \in Z)$ , 而后 15 天此商品每天每件的利润  $f_2(t)$  (单位: 元) 与时间第  $t$  天的函数关系式为  $f_2(t) = \frac{600}{t} + 2 (16 \leq t \leq 30, \text{且 } t \in Z)$ .

(1) 现给出以下两类函数模型: ①  $m(t) = kt + b (k, b \text{ 为常数})$ ; ②  $m(t) = b \cdot a^t (a, b \text{ 为常数, } a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ . 分析表格中的数据, 请说明应选择哪类函数模型, 并求出该函数模型的解析式;

(2) 若这 30 天内该企业此商品的日销售利润均未能超过 40 000 元, 则考虑转型. 请判断该企业是否需要考虑转型, 并说明理由.

22. (12分)

已知函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1, & 0 < x < 1, \\ (x-1)^2, & x \geq 1. \end{cases}$

(1) 当  $0 < a < b$ , 且  $f(a) = f(b)$  时, 求  $\left(\frac{1}{a}\right)^2 + (b-1)^2$  的取值范围;

(2) 是否存在正实数  $a, b (a < b)$ , 使得函数  $y = f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的取值范围是  $[a-1, b-1]$ ? 若存在, 则求出  $a, b$  的值; 若不存在, 请说明理由.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线