中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 1 月测试

数学试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．集合 $A=\{1,2,3,4,5\},B=\{y|y=2^x,x\in N\}$，则 $A\bigcap C_{\mathrm{R}}B$ 中元素个数为

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

2．已知复数 z 满足 $\dfrac{z-i}{i}=a+2i$（i 是虚数单位），$a\in\mathbf{R}$，且 $|z|=2\sqrt{2}$，则实数 a 的值为

A．-3　　B．1　　C．-1 或 1　　D．-3 或 1

3．已知 $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=1$，向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $120°$，若 $k\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-2\vec{b}$ 垂直，则 k 的值为

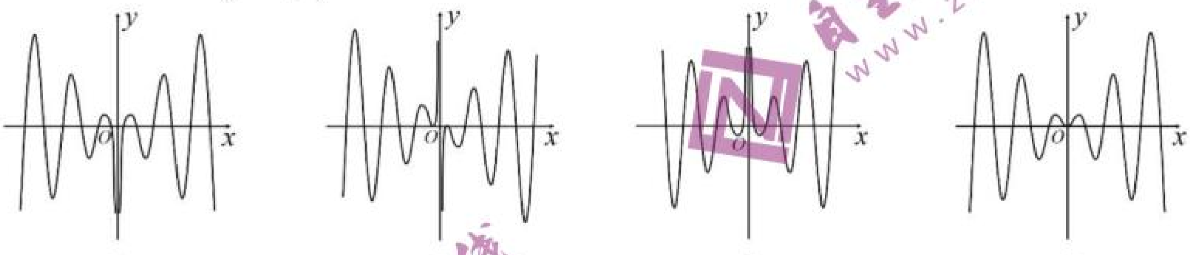
A．-1　　B．1　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{1}{2}$

4．若 $a,b\in[0,1]$，则"$a+b^2\le 1$"是"$a+b\le\dfrac{5}{4}$"的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．已知函数 $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{x^3}\right)\cdot\sin x$，则其图象为



A　　B　　C　　D

6．二项式 $(1+x)^2(2x-1)^5$ 的展开式中含 x^4 项的系数为

A．280　　B．200　　C．120　　D．40

7．已知 $-\dfrac{\pi}{2}<\beta-\alpha<\dfrac{\pi}{2},\sin\beta-2\cos\alpha=1,2\sin\alpha+\cos\beta=\sqrt{2}$，则 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=$

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　C．$\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　D．$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

8. 函数 $f(x)=\sqrt{\sin\pi x}(0\le x\le 1), g(x)=x\cdot f(x)$，直线 $x=m(0<m<1)$ 先后与 $f(x), g(x), x$ 轴交于 A,B,C，直线 $x=1-m$ 先后与 $f(x), g(x), x$ 轴交于 A_1,B_1,C_1，则

A. $AB=A_1B_1$　　B. $AB=2A_1B_1$　　C. $AB=B_1C_1$　　D. $AB=2B_1C_1$

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合要求，全部选对得 5 分，选对但不全的得 3 分，有选错的得 0 分．

9. 某城市为了解游客人数的变化规律，提高旅游服务质量，收集并整理了 2014 年 1 月至 2016 年 12 月期间月接待游客量（单位：万人）的数据，绘制了下面的折线图，根据该折线图，下列结论正确的是

（第 9 题图）

A．月接待游客量逐月增加

B．年接待游客量逐年增加

C．各年的月接待游客量高峰期大致在 7,8 月份

D．各年 1 月至 6 月的月接待游客量相对 7 月至 12 月，波动性更小，变化比较平稳

10. 已知 F_1,F_2 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，过 F_2 的直线交双曲线 C 的右支于 A,B 两点，且 $|AF_1|=2|AF_2|, \angle AF_1F_2=\angle F_1BF_2$，则下列结论成立的是

A．$|AF_2|=2a$　　B．$\cos\angle F_1AF_2=\dfrac{1}{4}$

C．离心率 $e=2$　　D．渐近线的斜率 $k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

11. 已知正六棱锥 $V-ABCDEF$，P 是侧棱 VC 上一点（不含端点），记直线 PB 与直线 DE 所成角为 α，直线 PB 与平面 ABC 所成角为 β，二面角 $P-CD-F$ 的平面角为 γ，则下列结论正确的是

A．$\beta<\gamma$　　B．$\beta<\alpha$　　C．$\gamma<\beta$　　D．$\alpha<\beta$

12. 古希腊著名数学家阿波罗尼斯与欧几里得、阿基米德齐名．他发现："平面内到两个定点 A,B 的距离之比为定值 $\lambda(\lambda\ne 1)$ 的点的轨迹是圆"．后来人们将这个圆以他的名字命名，称为阿波罗尼斯圆，简称阿氏圆．在平面直角坐标系 xOy 中，$A(-2,0), B(4,0)$，点 P 满足 $\dfrac{|PA|}{|PB|}=\dfrac{1}{2}$．设点 P 的轨迹为 C，下列结论正确的是

A．曲线 C 的方程为 $(x+4)^2+y^2=16$

B．在曲线 C 上存在点 M，使得 $|MO|=2|MA|$

C．在 x 轴上存在异于 A,B 的两定点 D,E，使得 $\dfrac{|PD|}{|PE|}=\dfrac{1}{2}$

D．当 A,B,P 三点不共线时，射线 PO 是 $\angle APB$ 的平分线

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．若函数 $f(x)=\begin{cases}\log_a x, x\ge 2\\ -\log_a x-4, 0<x<2\end{cases}$ 存在最大值，则实数 a 的取值范围是________．

14．现将大小和形状相同的 4 个黑色球和 4 个红色球排成一排，从左边第一个球开始数，不管数几个球，黑球数不少于红球数的排法有________种．

15．在 ΔABC 中，$AB+BC=4$，$\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{\sin A}{4-\cos A}$，则当角 B 最大时，ΔABC 的面积为________．

16．已知抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点为 F，过点 F 斜率为1的直线 l 与抛物线相交于 A,B 两点，若 $|AF|>|BF|$ 且 $|BF|=1$，则 $p=$________，$|AB|=$________．

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）随着移动互联网的发展，与餐饮美食相关的手机 APP 软件层出不穷．为调查某款订餐软件的商家的服务情况，统计了10次订餐“送达时间”，得到茎叶图如下（时间：分钟）：

茎	叶
2	8 9
3	2 4 4 5 6 8
4	1 3

送达时间	35分钟以内（包括35分钟）	超过35分钟
频数	A	B
频率	C	D

（1）请计算“送达时间”的平均数与方差；

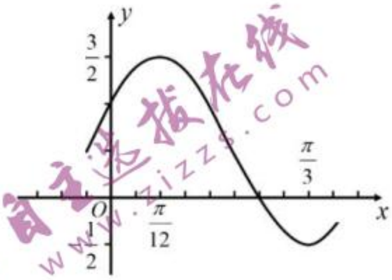
（2）根据茎叶图求出 A,B,C,D 的值；

（3）在（2）的情况下，以频率代替概率，现有3个客户应用此软件订餐，求出在35分钟以内（包括35分钟）收到餐品的人数 X 的分布列，并求出随机变量 X 的数学期望．

18．（12 分）已知①函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x(\omega>0)$，周期是 $\dfrac{\pi}{2}$；②函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+k(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{R})$ 的图像如图所示；在以上两个条件中选择一个解答下列问题．（注：如果选择多个条件分别进行解答，则按第一个解答进行计分．）

（1）求 $f(x)$ 的解析式，以及 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{7\pi}{24}\right]$ 时 $f(x)$ 的值域；

（2）将 $f(x)$ 图像上所有点的横坐标扩大到原来的 2 倍，纵坐标不变，再向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位，最后将整个函数图像向上平移 $\dfrac{3}{2}$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图像，若 $|g(x)-m|<1$ 成立的充分条件是 $0\le x\le\dfrac{5\pi}{12}$，求 m 的取值范围.

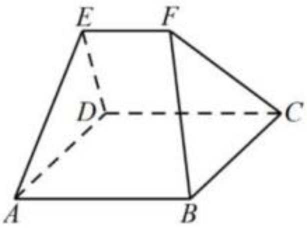


（第 18 题图）

19. （12 分）如图所示的多面体中，四边形 $ABCD$ 是正方形，平面 $ADE\perp$ 平面 $CDEF,EF//CD$，$AB=2,ED=2,EF=1,\angle EDA\ne 90^\circ$.

（1）证明：平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）若 CF 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，求这个多面体的体积 V.



（第 19 题图）

20. （12 分）数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n,n\in N^*$，满足 $S_n=1-a_n$，设 $b_n=2(S_n+a_{n+1})$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n.

（1）求 T_n；

（2）设 $c_n=S_n+T_n$，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 R_n，求证：$\dfrac{T_1+1}{R_1^2}+\dfrac{T_2+1}{R_2^2}+\cdots\dfrac{T_n+1}{R_n^2}<1$.

21. （12 分）已知 F_1,F_2 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，弦 AB 经过点 F_2，若 $|AF_2|=2|F_2B|,\tan\angle AF_1B=\dfrac{3}{4}$，且 ΔF_1F_2B 的面积为 2.

（1）求椭圆的方程；

（2）若直线 $y=k(x-1)(1\le k\le 2)$，与椭圆 C 交于 M,N 两点，O 为坐标原点，求 ΔOMN 的面积的取值范围.

22. （12 分）设 a 为正实数，函数 $f(x)=ae^{ax}-\sqrt{x}$ 存在零点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，且存在极值点 x_0.

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）求 a 的取值范围，并证明：$2x_1+3x_0>3$.

中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 1 月测试

数学参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8
B	D	D	A	A	D	B	C

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合要求，全部选对得 5 分，选对但不全的得 3 分，有选错的得 0 分．

9	10	11	12
BCD	ABC	AB	ACD

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

14. 14

15. $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

16. $p=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2};|AB|=4+2\sqrt{2}$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 解：

（1）“送达时间”的平均数：

$\dfrac{28+29+32+34+34+35+36+38+41+43}{10}=35(\text{分钟})$ ....1 分

方差为：$\dfrac{7^2+6^2+3^2+1^2+1^2+0^2+1^2+3^2+6^2+8^2}{10}=20.6$ ....2 分

（2）由茎叶图得：

$A=6,B=4,C=0.6,D=0.4$ ....4 分

（3）X 的可能取值为：$0,1,2,3$，

$P(X=0)=C_3^0\times0.6^0\times0.4^3=0.064$，

$P(X=1)=C_3^1\times0.6^1\times0.4^2=0.288$，

$P(X=2)=C_3^2\times0.6^2\times0.4^1=0.432$，

$P(X=3)=C_3^3\times0.6^3\times0.4^0=0.216$……7 分

∴随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	0.064	0.288	0.432	0.216

……8 分

∵ X 服从二项分布 $B(3,0.6)$，∴ $E(X)=3\times0.6=1.8$……10 分

18．解：

选择条件①解答如下

（1）

$$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\omega x+\frac{1}{2}(\cos2\omega x+1)=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$$

……2 分

由 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{2}$，解得 $\omega=2$，所以函数 $f(x)=\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$……3 分

因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{24}\right]$，所以 $-\frac{\pi}{6}\le4x+\frac{\pi}{6}\le\frac{4\pi}{3}$，所以 $\frac{1-\sqrt{3}}{2}\le\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\le\frac{3}{2}$，

即函数 $f(x)$ 在 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{24}\right]$ 上的值域是 $\left[\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right]$……5 分

（2）由题意得 $g(x)=\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)+2$……7 分

因为 $|g(x)-m|<1$，所以 $g(x)-1<m<g(x)+1$．

∵ $|g(x)-m|<1$ 成立的充分条件是 $0\le x\le\frac{5\pi}{12}$，

$\therefore$ 当 $x\in\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]$ 时，$g(x)-1<m<g(x)+1$ 恒成立，

所以只需 $[g(x)-1]_{\max}<m<[g(x)+1]_{\min}$，转化为求 $g(x)$ 的最大值与最小值.......9 分

当 $x\in\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]$ 时，$2x+\frac{5\pi}{6}\in\left[\frac{5\pi}{6},\frac{5\pi}{3}\right]$，

所以 $g(x)_{\max}=g(0)=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}, g(x)_{\min}=g\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1+2=1$，

从而 $[g(x)-1]_{\max}=\frac{3}{2},[g(x)+1]_{\min}=2$，即 $\frac{3}{2}<m<2$.

所以 m 的取值范围是 $\left(\frac{3}{2},2\right)$.......12 分

选择条件②解答如下：

（1）由已知 $A=\frac{\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}=1, k=\frac{\frac{3}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}=\frac{1}{2}$，

$\because \frac{T}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}, \therefore T=\frac{\pi}{2}, \therefore \omega=\frac{2\pi}{T}=4$，

$\therefore f(x)=\sin(4x+\varphi)+\frac{1}{2}$，过点 $\left(\frac{\pi}{12},\frac{3}{2}\right)$

$\therefore 4\times\frac{\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}, \therefore \varphi=\frac{\pi}{6}$，

$\therefore f(x)=\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$

因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{24}\right]$，所以 $-\frac{\pi}{6}\le 4x+\frac{\pi}{6}\le\frac{4\pi}{3}$，所以 $\frac{1-\sqrt{3}}{2}\le\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\le\frac{3}{2}$，

即函数 $f(x)$ 在 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{24}\right]$ 上的值域是 $\left[\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right]$.......5 分

（2）由题意得 $g(x)=\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)+2$.......7 分

因为 $|g(x)-m|<1$，所以 $g(x)-1<m<g(x)+1$.

$\because |g(x)-m|<1$ 成立的充分条件是 $0\le x\le\frac{5\pi}{12}$，

$\therefore$ 当 $x\in\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]$ 时，$g(x)-1<m<g(x)+1$ 恒成立，

所以只需 $[g(x)-1]_{\max}<m<[g(x)+1]_{\min}$，转化为求 $g(x)$ 的最大值与最小值……9 分

当 $x\in\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]$ 时，$2x+\frac{5\pi}{6}\in\left[\frac{5\pi}{6},\frac{5\pi}{3}\right]$，

所以 $g(x)_{\max}=g(0)=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}, g(x)_{\min}=g\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1+2=1$，

从而 $\left[g(x)-1\right]_{\max}=\frac{3}{2},\left[g(x)+1\right]_{\min}=2$，即 $\frac{3}{2}<m<2$，

所以 m 的取值范围是 $\left(\frac{3}{2},2\right)$……12 分

19．解：

（1）证明：过点 A 在平面 ADE 内做 DE 的垂线，垂足为 P．

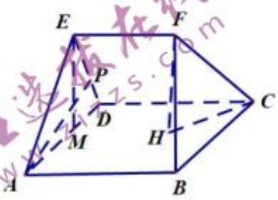
因为平面 $ADE\perp$ 平面 $CDEF$，平面 $ADE\cap$ 平面 $CDEF=DE$，

所以 $AP\perp$ 平面 $CDEF$，所以 $AP\perp CD$……2 分

又因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $AD\perp CD$……3 分

$\because \angle EDA\neq 90^{\circ}$，又 $AP\cap AD=A$，从而 $CD\perp$ 平面 ADE，而 $CD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$……5 分



（2）在平面 ADE 内，过点 E 作 AD 垂线，垂足为 M，

与（1）同理得，$EM\perp$ 平面 $ABCD$，

过 F 作 $FH//EM$，交平面 $ABCD$ 于 H，连接 CH

$\therefore FH\perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore CH$ 是 FC 在平面 $ABCD$ 内的射影．

$\therefore \angle FCH$ 为 CF 与平面 $ABCD$ 所成角，

$\because CD\perp$ 平面 $ADE, ED\subset$ 平面 $ADE, \therefore CD\perp ED$，即 $\angle EDC=90^{\circ}$……7 分

由 $CD=AB=2, ED=2, EF=1$，得 $CF=\sqrt{5}$……8 分

$\because CF$ 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$，所以 $FH=\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{15}}{5}=\sqrt{3}$……9 分

因为 $EF//CD, EF\not\subset$ 平面 $ABCD, CD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $EF//$ 平面 $ABCD$，所以 $EM=FH=\sqrt{3}$，

又 $ED=2$，所以 $\angle EDA=60^{\circ}$，从而 ΔADE 是正三角形，

可得：$S_{\Delta ADE}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ ....10 分

因为 $CD\perp$ 平面 $ADE, EF//CD$，所以 $EF\perp$ 平面 ADE，所以这个多面体的体积

$V=V_{\text{四棱锥}F-ABCD}+V_{\text{三棱锥}F-ADE}=\frac{1}{3}\times 4\times\sqrt{3}+\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times 1=\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ......12 分

20．解：

（1）$S_1=1-a_1$ 得 $a_1=\frac{1}{2}$ ....1 分

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=(1-a_{n+1})-(1-a_n)=a_n-a_{n+1}$，所以 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$，

可得 $\{a_n\}$ 为等比数列，所以 $a_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^n}$ ....3 分

$T_n=2(S_1+a_1+S_2+a_2+\cdots+S_n+a_n)-2a_1+2a_{n+1}$

$=2n-2\times\frac{1}{2}+2a_{n+1}=2n-1+\frac{1}{2^n}$ ....6 分

（2）因为 $c_n=S_n+T_n=1-a_n+T_n$，由（1）代入可得：

$c_n=1-\frac{1}{2^n}+2n-1+\frac{1}{2^n}=2n$ ....8 分，

$R_n=n(n+1)$ ....9 分

$\frac{T_n+1}{R_n^2}=\frac{2n+\frac{1}{2^n}}{n^2(n+1)^2}<\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$，

所以 $\frac{T_1+1}{R_1^2}+\frac{T_2+1}{R_2^2}+\cdots\frac{T_n+1}{R_n^2}<1-\frac{1}{(n+1)^2}<1$ ....12 分

21．解：

解：（1）设 $|AF_2|=2|F_2B|=2k$（$k>0$），则 $|AF_1|=2a-2k, |F_1B|=2a-k$，

在 ΔAF_1B 中，由余弦定理得 $(3k)^2=(2a-2k)^2+(2a-k)^2-2(2a-2k)(2a-k)\cdot\frac{4}{5}$，

整理得 $2a^2-3ak-9k^2=0$，解得 $a=3k$ …….2 分

所以 $|AF_1|=4k,|F_1B|=5k,|AB|=3k$，所以 $\angle F_1AF_2=90^\circ$，

在 $Rt\Delta AF_1F_2$ 中，$|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2$，即 $(4k)^2+(2k)^2=(2c)^2$，

解得 $c=\sqrt{5}k$ …….3 分

又因为 $\dfrac{S_{\Delta AF_1F_2}}{S_{\Delta BF_1F_2}}=\dfrac{|AF_2|}{|F_2B|}=2$，

故 $S_{\Delta AF_1F_2}=2S_{\Delta BF_1F_2}$，$S_{\Delta AF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|AF_1|\cdot|AF_2|=\dfrac{1}{2}\cdot 4k\cdot 2k=4k^2$，故 $4=4k^2$，

即 $k=1,c=\sqrt{5},a=3,b=2$，所以椭圆 C 的方程是 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$…….5 分

（2）由 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 得 $(4+9k^2)x^2-18k^2x+9k^2-36=0$．设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

则有 $x_1+x_2=\dfrac{18k^2}{4+9k^2},x_1x_2=\dfrac{9k^2-36}{4+9k^2}$ ……7 分

$|MN|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\dfrac{24\sqrt{(1+k^2)(1+2k^2)}}{4+9k^2}$ ……8 分

O 到直线 MN 的距离为 $\dfrac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}$，所以 ΔOMN 的面积为

$S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{24\sqrt{(1+k^2)(1+2k^2)}}{4+9k^2}\cdot\dfrac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}=12\sqrt{\dfrac{(1+2k^2)k^2}{(4+9k^2)^2}}$，……10 分

令 $4+9k^2=t,t\in[13,40]$，

则 $S=\dfrac{4}{3}\sqrt{2-\dfrac{7}{t}-\dfrac{4}{t^2}}$，令 $\dfrac{1}{t}=m\in\left[\dfrac{1}{40},\dfrac{1}{13}\right]$，

则 $S=\dfrac{4}{3}\sqrt{-4m^2-7m+2}$，当 $m=\dfrac{1}{40}$ 时，$S_{\max}=\dfrac{9}{5}$，当 $m=\dfrac{1}{13}$ 时，$S_{\min}=\dfrac{12\sqrt{3}}{13}$，

所以 ΔOMN 的面积的取值范围是 $\left[\dfrac{12\sqrt{3}}{13},\dfrac{9}{5}\right]$ ……12 分

22．解：

（1）$f'(x)=a^2e^{ax}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$，则 $f'(1)=a^2e^a-\frac{1}{2}=e-\frac{1}{2}$……2 分

当 $x=1$ 时，$f(1)=ae^a-1=e-1$，所以切点坐标为 $(1,e-1)$，

则切线方程为 $y=\left(e-\frac{1}{2}\right)(x-1)+e-1$，即 $y=\left(e-\frac{1}{2}\right)x-\frac{1}{2}$……4 分

（2）$\because f'(x)=a^2e^{ax}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2a^2\sqrt{x}e^{ax}-1}{2\sqrt{x}}$，

记 $g(x)=2a^2\sqrt{x}e^{ax}-1, \because a>0, \therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

记 $p(x)=e^x-ex$，$p'(x)=e^x-e=0\Rightarrow x=1$，

当 $x>1$ 时，$p'(x)>0, p(x)$ 单调递增；

当 $0\le x<1$ 时，$p'(x)<0, p(x)$ 单调递减，

$\therefore p(x)\ge p(1)=e-e=0$，有 $e^x\ge ex$，故有 $e^{ax}\ge eax$……6 分

$\therefore g(x)\ge 2a^2\sqrt{x}(eax)-1=2ea^3x^{\frac{3}{2}}-1$，可得 $g\left(\frac{4}{\sqrt[3]{2e^2a^2}}\right)>0$，

又 $\because g(0)=-1<0, \therefore g(x)$，存在唯一正根 t，

使得：$g(t)=0$，且在 $(0,t)$ 上 $g(x)<0$，在 $(t,+\infty)$ 上 $g(x)>0$，在 $x\in(0,t)$ 时，

$f'(x)<0$，在 $x\in(t,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，且 $f'(t)=0$，即 $f'(x)$ 存在唯一正根 t，

故 $f(x)$ 定有极小值点 $x_0=t$……8 分

由 $g(x_0)=0$，可知 $g(x_0)=2a^2\sqrt{x_0}e^{ax_0}-1=0, \therefore ae^{ax_0}=\frac{1}{2a\sqrt{x_0}}$，

又 $\because f(x)=ae^{ax}-\sqrt{x}$ 存在零点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，

$\therefore f(x_0)=ae^{ax_0}-\sqrt{x_0}=\frac{1}{2a\sqrt{x_0}}-\sqrt{x_0}=\frac{1-2ax_0}{2a\sqrt{x_0}}<0$，即 $ax_0>\frac{1}{2}$，

$\therefore 0=2\sqrt{x_0}\cdot a^2e^{ax_0}-1>2\sqrt{\frac{1}{2a}}\cdot a^2e^{\frac{1}{2}}-1=\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{e}-1$，可得 $0<a<\frac{1}{\sqrt[3]{2e}}$……9 分

由题可得 $ae^{ax_1}=\sqrt{x_1}$，$a^2e^{ax_0}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$，将两式相除可得 $e^{a(x_1-x_0)}=2a\sqrt{x_1x_0}$，

记 $r(x)=e^x-x-1$，令 $r'(x)=e^x-1=0\Rightarrow x=1$，

当 $x>0$ 时，$r'(x)>0,r(x)$ 单调递增；当 $x<0$ 时，$r'(x)<0,r(x)$ 单调递减，

则 $r(x)\ge r(0)=e^0-0-1=0$，即 $e^x\ge x+1$……10 分

$\therefore e^{a(x_1-x_0)}=2a\sqrt{x_1x_0}\ge 1+a(x_1-x_0)>\sqrt[3]{2e}\cdot a+a(x_1-x_0)$，

$\because a>0,\therefore \sqrt[3]{2e}+(x_1-x_0)<2\sqrt{x_1x_0}$，

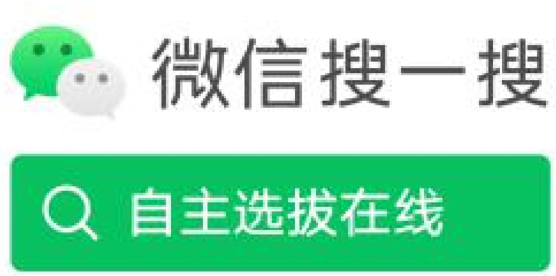
$\because e>2>\dfrac{27}{16}\therefore 2e>\dfrac{27}{8}\Rightarrow \sqrt[3]{2e}>\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}+(x_1-x_0)<\sqrt[3]{2e}+(x_1-x_0)<2\sqrt{x_1x_0}$，

$\because 2\sqrt{x_1x_0}\le 2x_1+\dfrac{x_0}{2}\therefore \dfrac{3}{2}+(x_1-x_0)<2x_1+\dfrac{x_0}{2}$，即有：$2x_1+3x_0>3$……12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》