机密★启用前

华大新高考联盟2020届高三4月教学质量测评

理科数学

命题：华中师范大学考试研究院

本试题卷共4页，23题(含选考题)。全卷满分150分。考试用时120分钟。

★祝考试顺利★

注意事项：

1.答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将准考证号条形码贴在答题卡上的指定位置。

2.选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3.填空题和解答题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4.选考题的作答：先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用2B铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

5.考试结束后，请将答题卡上交。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知复数 $z=1+\frac{1}{i}$，则 $z\cdot\bar{z}=$

A.0　　B.1　　C.$\sqrt{2}$　　D.2

2.设集合 $A=\{x|x>3\}$，$B=\{x|\log_3(x-a)>0\}$，则 $a=3$ 是 $B\subseteq A$ 的

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分又不必要条件

3.设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_3=5$，$a_7+a_9=30$，则 $S_{10}=$

A.85　　B.97　　C.100　　D.175

4.魏晋时期的数学家刘徽首创割圆术，为计算圆周率建立了严密的理论和完善的算法.所谓割圆术，就是以圆内接正多边形的面积，来无限逼近圆面积.刘徽形容他的割圆术说："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣."某学生在一圆盘内画一内接正十二边形，将100粒豆子随机撒入圆盘内，发现只有4粒豆子不在正十二边形内.据此实验估计圆周率的近似值为

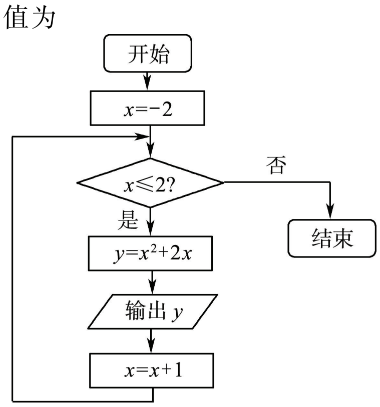
A.$\frac{10}{3}$　　B.$\frac{16}{5}$　　C.$\frac{22}{7}$　　D.$\frac{25}{8}$

5.已知 $x=\lg2$，$y=\ln3$，$z=\log_2 3$，则

A.$x<z<y$　　B.$z<y<x$

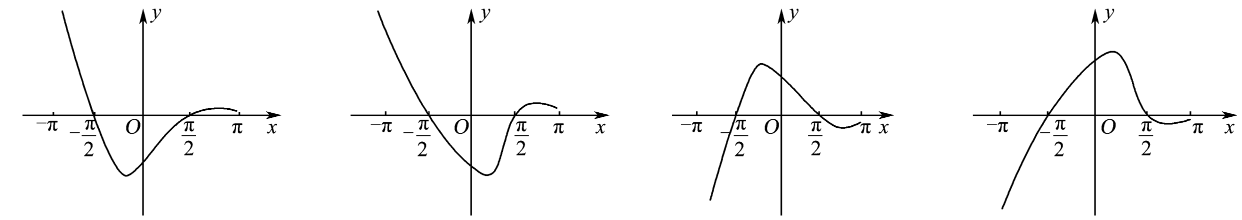
C.$x<y<z$　　D.$z<x<y$

6.执行如图所示程序框图，设输出数据构成集合 A，从集合 A 中任取一个元素 m，则事件"函数 $f(x)=x^2+mx$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数"的概率为



A.$\frac{1}{4}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.$\frac{3}{4}$　　D.$\frac{3}{5}$

7.设 $f(x)$，$g(x)$分别为定义在$[-\pi,\pi]$上的奇函数和偶函数，且 $f(x)+g(x)=2e^{x}\cos x$（e 为自然对数的底数），则函数 $y=f(x)-g(x)$的图象大致为



A　　B　　C　　D

8.某病毒研究所为了更好地研究“新冠”病毒，计划改建十个实验室，每个实验室的改建费用分为装修费和设备费，每个实验室的装修费都一样，设备费从第一到第十实验室依次构成等比数列，已知第五实验室比第二实验室的改建费用高 42 万元，第七实验室比第四实验室的改建费用高 168 万元，并要求每个实验室改建费用不能超过 1 700 万元.则该研究所改建这十个实验室投入的总费用最多需要

A.3 233 万元　　B.4 706 万元

C.4 709 万元　　D.4 808 万元

9.设点 F 为抛物线 $y^{2}=16x$ 的焦点，A，B，C 三点在抛物线上，且四边形 $ABCF$ 为平行四边形，若对角线 $|BF|=5$（点 B 在第一象限），则对角线 AC 所在的直线方程为

A.$8x-2y-11=0$　　B.$4x-y-8=0$

C.$4x-2y-3=0$　　D.$2x-y-3=0$

10.设函数 $f(x)=2|\sin x|+\sin x+2\cos 2$，给出下列四个结论：①$f(2)>0$；②$f(x)$在$\left(-3\pi,-\frac{5\pi}{2}\right)$上单调递增；③$f(x)$的值域为$[-1+2\cos 2,3+2\cos 2]$；④$f(x)$在$[0,2\pi]$上的所有零点之和为 4π.则正确结论的序号为

A.①②　　B.③④　　C.①②④　　D.①③④

11.设点 F_1，F_2 分别为双曲线 $C:\frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，点 A，B 分别在双曲线 C 的左、右支上，若$\overrightarrow{F_1B}=6\overrightarrow{F_1A}$，$\overrightarrow{AF_2}^{2}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF_2}$，且$|\overrightarrow{AF_2}|>|\overrightarrow{BF_2}|$，则双曲线 C 的离心率为

A.$\frac{17}{5}$　　B.$\frac{13}{5}$　　C.$\frac{\sqrt{85}}{5}$　　D.$\frac{\sqrt{65}}{5}$

12.在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M，N，P 分别在 AA_1，A_1D_1，D_1C_1 上，M 为 AA_1 的中点，$\frac{A_1N}{ND_1}=\frac{C_1P}{PD_1}=2$，过点 A 作平面 α，使得 $BC_1\perp\alpha$，若 $\alpha\cap$平面 $A_1B_1C_1D_1=m$，$\alpha\cap$平面 $MNP=n$，则直线 m 与直线 n 所成的角的正切值为

A.$\frac{3\sqrt{2}}{7}$　　B.$\frac{6\sqrt{2}}{7}$　　C.$\frac{\sqrt{2}}{7}$　　D.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.在$\left(x-\frac{1}{2x^{2}}\right)^{6}$的展开式中，常数项为________（用数字作答）.

14.在等腰直角△ABC 中，$AB=2$，$\angle BAC=90°$，AD 为斜边 BC 的高，将△ABC 沿 AD 折叠，使二面角

B-AD-C 为 $60°$，则三棱锥 A-BCD 的外接球的表面积为________.

15.在△ABC 中，$AB=5$，$AC=4$，$BC=3$，已知 MN 为△ABC 内切圆的一条直径，点 P 在△ABC 的外接圆上，则$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$的最大值为________.

16.用符号$[x]$表示不超过 x 的最大整数，例如：$[0.6]=0$；$[2.3]=2$；$[5]=5$.设函数 $f(x)=ax^2-2\ln^2(2x)+(2-ax^2)\ln(2x)$有三个零点 $x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$，且$[x_1]+[x_2]+[x_3]=3$，则 a 的取值范围是________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

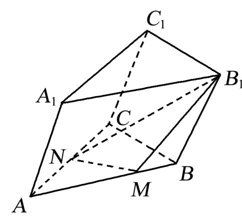
在△ABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $b^2+2\sqrt{3}ac\sin B=(a+c)^2$，△$ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$.

（1）求角 B；

（2）设 $\lambda,b,|a-c|$成等比数列，求 λ 的最小值.

18.（12 分）

如图所示，在三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，侧面 ACC_1A_1 为菱形，$\angle A_1AC=60°$，$AC=2$，侧面 CBB_1C_1 为正方形，平面 $ACC_1A_1\perp$平面 ABC.点 N 为线段 AC 的中点，点 M 在线段 AB 上，且$\dfrac{AM}{MB}=2$.



（1）证明：平面 $BB_1C_1C\perp$平面 ACC_1A_1；

（2）求直线 BB_1 与平面 B_1MN 所成角的正弦值.

19.（12 分）

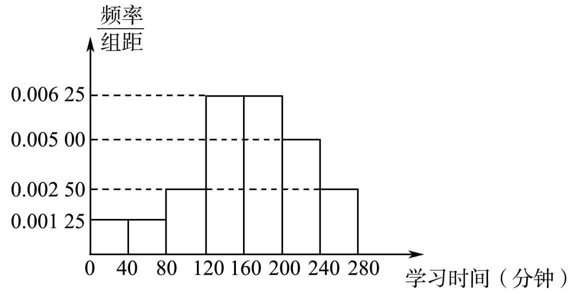
设以△ABC 的边 AB 为长轴且过点 C 的椭圆 Γ 的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，椭圆 Γ 的离心率 $e=\dfrac{1}{2}$，△ABC 面积的最大值为 $2\sqrt{3}$，AC 和 BC 所在的直线分别与直线 $l:x=4$ 相交于点 M,N.

（1）求椭圆 Γ 的方程；

（2）设△ABC 与△CMN 的外接圆的面积分别为 S_1,S_2，求$\dfrac{S_2}{S_1}$的最小值.

20.（12 分）

2020 年寒假期间新冠肺炎肆虐，全国人民众志成城抗击疫情.某市要求全体市民在家隔离，同时决定全市所有学校推迟开学.某区教育局为了让学生“停课不停学”，要求学校各科老师每天在网上授课，每天共 280 分钟，请学生自主学习.区教育局为了了解高三学生网上学习情况，上课几天后在全区高三学生中采取随机抽样的方法抽取了 100 名学生进行问卷调查，为了方便表述把学习时间在$(0,120]$分钟的学生称为 A 类，把学习时间在$(120,200]$分钟的学生称为 B 类，把学习时间在$(200,280]$分钟的学生称为 C 类，随机调查的 100 名学生学习时间的人数频率分布直方图如图所示：



以频率估计概率回答下列问题：

(1)求 100 名学生中 A,B,C 三类学生分别有多少人?

(2)在 A,B,C 三类学生中,按分层抽样的方法从上述 100 个学生中抽取 10 人,并在这 10 人中任意邀请 3 人电话访谈,求邀请的 3 人中是 C 类的学生人数的分布列和数学期望;

(3)某校高三(1)班有 50 名学生,某天语文和数学老师计划分别在 19:00—19:40 和 20:00—20:40 在线上与学生交流,由于受校园网络平台的限制,每次只能 30 个人同时在线学习交流.假设这两个时间段高三(1)班都有 30 名学生相互独立地随机登录参加学习交流.设 ξ 表示参加语文或数学学习交流的人数,当 ξ 为多少时,其概率最大.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=4ax-\sin x+2ax\cos x$,$(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $a=\dfrac{1}{4}$,当 $x\in(0,\pi)$时,证明:$f(x)<\dfrac{\pi}{2}$;

(2)若当 $x\in[0,+\infty)$时,$f(x)\geqslant 0$,求 a 的取值范围.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答,如果多选,则按所做的第一题计分。

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{21}}{3}\cos\theta,\\ y=2+\dfrac{\sqrt{21}}{3}\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数),以坐标原点 O 为极点,x 轴的非负半轴为极轴的极坐标系中,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2=\dfrac{8}{5-3\cos2\alpha}$,点 P 在曲线 C_1 上,点 Q 在曲线 C_2 上.

(1)求曲线 C_1 的一般方程和曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2)求 $|PQ|$ 的最大值.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

设 a,b,c 都是正数,且 $a+b+c=1$.

(1)求$\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{c}$的最小值;

(2)证明:$a^4+b^4+c^4\geqslant abc$.