2021学年第一学期五校联考试题

高三年级数学学科

命题：浙江省杭州第二中学

考生须知：

1. 本卷满分150分，考试时间120分钟；
2. 答题前，在答题卷指定区域填写学校、班级、姓名、试场号、座位号及准考证号；
3. 所有答案必须写在答题卷上，写在试卷上无效；
4. 考试结束后，只需上交答题卷.

参考公式：

若事件 A，B 互斥，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$

若事件 A，B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$

若事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，则 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率 $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$

台体的体积公式：$V=\frac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h$

其中 S_1,S_2 分别表示台体的上、下底面积，h 表示台体的高

柱体的体积公式：$V=Sh$

其中 S 表示柱体的底面积，h 表示柱体的高

锥体的体积公式：$V=\frac{1}{3}Sh$

其中 S 表示锥体的底面积，h 表示锥体的高

球的表面积公式：$S=4\pi R^2$

球的体积公式：$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

第I卷（选择题部分，共40分）

一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|0<x<2\}$，$B=\{x|x^2+4x-5>0\}$，则 $A\cap(\complement_R B)$ 等于（　　）

A．$\{x|0<x\le1\}$　　B．$\{x|1\le x<2\}$　　C．$\{x|0<x<2\}$　　D．$\{x|-1\le x<2\}$

2. 已知点 $(1,1)$ 在直线 $x+2y+b=0$ 的下方，则实数 b 的取值范围为（　　）

A．$b>-3$　　B．$b<-3$　　C．$-3<b<0$　　D．$b>0$ 或 $b<-3$

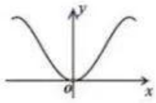
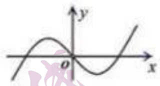
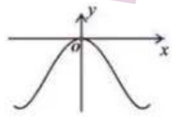
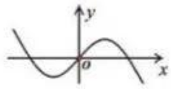
3. 若 $a>b>0$，$m<0$．则下列不等式成立的是（　　）

A．$am^2<bm^2$　　B．$\frac{m}{b-a}>1$　　C．$\frac{a-m}{b-m}<\frac{a}{b}$　　D．$\frac{a-m}{a^2}>\frac{b-m}{b^2}$

4. 已知$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{3}$，则$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=$（　　）

A. $-\frac{7}{9}$　　B. $\frac{7}{9}$　　C. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$　　D. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

5. 函数$f(x)=\left(1-\frac{2}{1+e^x}\right)\cos x$（其中$e$为自然对数的底数）的图象大致形状是（　　）

A.  B.  C.  D. 

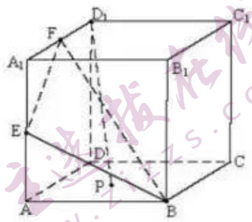
6. 有10台不同的电视机，其中甲型3台，乙型3台，丙型4台. 现从中任意取出3台，若其中至少含有两种不同的型号，则不同的取法共有(　　)

A. 96种　　B. 108种　　C. 114种　　D. 118种

7. 设无穷等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$-a_1<a_2<a_1$，则（　　）

A. $\{S_n\}$为递减数列 B. $\{S_n\}$为递增数列 C. 数列$\{S_n\}$有最大项 D. 数列$\{S_n\}$有最小项

8. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，E,F分别是棱AA_1,A_1D_1的中点，点P为底面$ABCD$内（包括边界）的一动点，若直线D_1P与平面BEF无公共点，则点P的轨迹长度为（　　）



A. $\sqrt{2}+1$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\sqrt{6}$

9. 已知$a\in R$，函数$f(x)=\ln^2 x+(2a^2+x)\ln x+a^4$的最小值为$g(a)$，则$g(a)$的最小值为（　　）

A. $-\frac{2}{e}$　　B. $-\frac{1}{e}$　　C. $-e$　　D. $-\frac{e}{2}$

10. 已知各项都为正数的数列$\{a_n\}$满足$a_1=a(a>2)$，$e^{-a_{n+1}}+a_{n+1}=-\frac{1}{a_n}+ka_n(n\in N^*)$，给出下列三个结论：①若$k=1$，则数列$\{a_n\}$仅有有限项；②若$k=2$，则数列$\{a_n\}$单调递增；③若$k=2$，则对任意的$M>0$，都存在$n_0\in N^*$，使得$\frac{n_0^2}{a_{n_0}}>M$成立. 则上述结论中正确的

为（　　）

A. ①②　　B. ②③　　C. ①③　　D. ①②③

第II卷（非选择题部分，共 110 分）

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分.

11. 已知复数 $z=i(2i-1)$（i 是虚数单位），则 z 的虚部为______，$|z|=$______.

12. 等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=6a_4$，$a_1+a_5=2a_2+10$，则公差 $d=$____，其前 n 项和的最小值为______.

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+3, x\le 2\\ 6+\log_a x, x>2\end{cases}$（$a>0$ 且 $a\ne 1$）.（1）若 $a=2$，则 $f(f(1))=$_____；

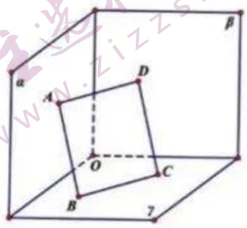
（2）若函数 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty,4]$，则实数 a 的取值范围是_______.

14. 已知 $(2x-1)^4=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+a_3(x-1)^3+a_4(x-1)^4$，则 $a_0+a_2+a_4$ 的值为___.

15. 已知 $x>0$，$y>0$，$2x+y=2$，则 $\dfrac{\sqrt{xy}}{(x+1)(y+2)}$ 的最大值为______.

16. 已知平面向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足：$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\vec{c}^2-(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}=0$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$________，$|\vec{a}-\vec{c}|$ 的取值范围是_________.

17. 如图，已知三个两两互相垂直的半平面 α,β,γ 交于点 O，矩形 $ABCD$ 的边 BC 在半平面 γ 内，顶点 A,D 分别在半平面 α,β 内，$AD=2, AB=3$，AD 与平面 α 所成角为 $\frac{\pi}{4}$，二面角 $A-BC-O$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$，则同时与半平面 α,β,γ 和平面 $ABCD$ 都相切的球的半径为_________.



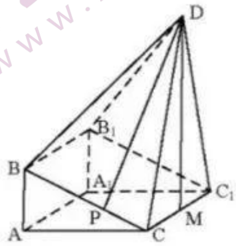
三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

18. （本题满分 14 分）已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x-\cos(2x+\frac{\pi}{6})$.

（I）求函数 $y=f(x)$ 的单调递增区间；

（II）在 ΔABC 中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，且满足 $2b\cos A\le 2c-\sqrt{3}a$，求 $f(B)$ 的取值范围.

19. （本题满分 15 分）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 和四棱锥 $D-BB_1C_1C$ 构成的几何体中，$AA_1\perp$ 平面 ABC，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=1$，$AC=\sqrt{2}$，$BB_1=2$，$DC_1=DC=\sqrt{5}$，平面 $CC_1D\perp$ 平面 ACC_1A_1.



（I）若点 M 为棱 CC_1 的中点，求证：DM // 平面 AA_1B_1B；

（II）已知点 P 是线段 BC 上靠近 C 的三等分点，求直线 DP 与平面 BB_1D 所成角的正弦值.

20. （本题满分 15 分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$，且 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}(n\in N^*)$.

（I）求证：数列 $\{\dfrac{1}{a_n-1}\}$ 是等差数列；

（II）记 $b_n=(-1)^{n+1}(2-a_n-a_{n+1})$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，若存在 $n\in N^*$，使得 $\lambda>T_n$ 成立，求实数 λ 的取值范围.

21. （本题满分 15 分）已知函数 $f(x)=1+a\sqrt{x}-\sqrt{1+ax}(a\neq 0)$.

（I）若 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线 l 的斜率为 $\dfrac{a}{4}$，求直线 l 的方程；

（II）若对于任意的 $x\in[0,2]$，$f(x)\le 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

22. （本题满分 15 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{4a}{a^2e^x+1}+x(a\in R)$.

（I）若 $a=1$，求证：当 $x>0$ 时，$x(f(x)-x)<\dfrac{4}{e}$；

（II）讨论方程 $f(x)=2$ 的根的个数.