2022 学年第二学期杭州市高二年级教学质量检测

数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8
A	C	B	B	C	C	A	B

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．AB　　10．AC　　11．BCD　　12．ACD

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．−28　　14．0　　15．63　　16．$\left(-\frac{5}{3}，1\right)$

四、解答题

17．（1）因为 $\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AD}-\lambda\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BD}$，

$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{CG}-\overrightarrow{CF}=(1-\lambda)\overrightarrow{CD}-(1-\lambda)\overrightarrow{CB}=(1-\lambda)\overrightarrow{BD}$，

所以 $\overrightarrow{EH}=\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\overrightarrow{FG}$，因此$E$，$F$，$G$，$H$四点共面．

（2）由（1）知，$\overrightarrow{EH}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD},\overrightarrow{FG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BD}$，

因此 $\overrightarrow{EH}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{FG}$，则 $\overrightarrow{EM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MG}$，所以，

$$\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB})+\frac{1}{3}(\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OD})$$

$$=\frac{4}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{9}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{9}\overrightarrow{OC}+\frac{2}{9}\overrightarrow{OD}$$

18．（1）设差数列$\{a_n\}$的公差为d，则由$S_4=4S_2$，$a_{2n}=2a_n+1(n\in\mathrm{N}^*)$可得

$\begin{cases}4a_1+6d=8a_1+4d,\\ a_1+(2n-1)d=2a_1+2(n-1)d+1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\ d=2.\end{cases}$ 因此 $a_n=2n-1(n\in\mathrm{N}^*)$.

（2）由 $a_n=2n-1$，得 $a_{b_n}=2b_n-1$，又由$\{a_{b_n}+1\}$是以a_1+1为首项，2 为公比的等比数列，得 $a_{b_n}+1=2^n$，因此 $2b_n=2^n$，$b_n=2^{n-1}$，

所以 $T_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$.

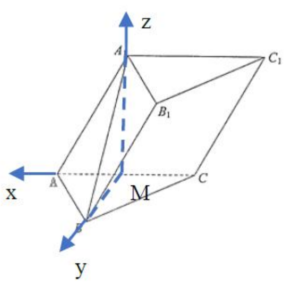
19．（1）证明：取AC中点M，连接A_1M，BM，则$BM\perp AC$.

$\because AA_1=AC$，$\angle A_1AC=60°$，$\therefore\triangle A_1AC$为等边三角形，

$\therefore A_1M\perp AC$，$\because A_1M=BM=\sqrt{3}$，$A_1B=\sqrt{6}$，$\therefore A_1M^2+BM^2=A_1B^2$，$\therefore A_1M\perp BM$，

$\because AC\cap BM=M$，AC，$BM\subset$平面ABC，

$\therefore A_1M\perp$平面ABC，



$\because A_1M\subset$平面A_1ACC_1，$\therefore$平面$A_1ACC_1\perp$平面ABC.

（2） 方法一：如图，以MA,MB,MA_1，

所在的直线为x轴，y轴，z轴建立空间直角坐标系.

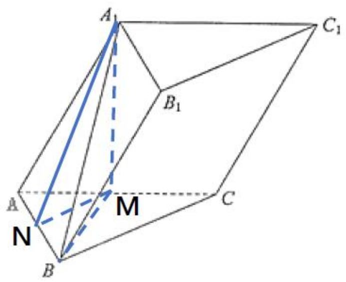
$\overrightarrow{A_1B_1}=(-1,\sqrt{3},0),\overrightarrow{A_1B}=(0,\sqrt{3},-\sqrt{3})$，

平面BA_1B_1的的法向量$\vec{n}=(\sqrt{3},1,1)$，

平面$A_1B_1C_1$的的法向量$\vec{m}=(0,0,1)$，

$\cos<\vec{n},\vec{m}>=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，故平面$BA_1B_1$与平面$A_1B_1C_1$的夹角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

方法二：由题可知平面BA_1B_1与平面$A_1B_1C_1$的夹角二面角$B-A_1B_1-C_1$的正弦值与平面A_1AB与平面ABC的夹角相等.



$\because A_1M\perp$平面ABC，过M作$MN\perp AB$于点N，连接A_1N，

$\therefore \angle A_1NM$即为平面A_1AB与平面ABC的夹角的平面角，

$\because A_1M=\sqrt{3}$，$MN=A_1M\cdot\cos60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore A_1N=\sqrt{3+\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{2}$，

$\therefore \sin\angle A_1NM=\frac{A_1M}{A_1N}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故平面BA_1B_1与平面$A_1B_1C_1$的夹角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

20. （1）

出行方式	国际大都市	中小型城市	合计
首选地铁	80	20	100
首选其他	60	40	100
合计	140	60	200

零假设为 H_0:城市规模与出行偏好地铁无关.

经计算$\chi2\approx 9．524>6．635$，根据小概率值$\alpha=0．010$的独立性检验，我们推断H_0不成立，即认为城市规模与出行偏好地铁有关，此推断犯错误的概率不大于 0．010.

（2）①证明：第n段行程上 David 坐地铁的概率为p_n，

则当$n\geq 2$时，第$n-1$段行程上 David 坐地铁的概率为p_{n-1}，不坐地铁的概率为$1-p_{n-1}$

则$p_n=p_{n-1}\cdot 0+(1-p_{n-1})\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{1}{3}$，

从而$p_n-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}(p_{n-1}-\frac{1}{4})$，

又$p_1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，所以$\left\{p_n-\frac{1}{4}\right\}$是首项为$\frac{3}{4}$，公比为$-\frac{1}{3}$的等比数列.

②解：由①可知$p_n=\frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^{n-1}+\frac{1}{4}$，

则$p_5=\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^4+\frac{1}{4}<\frac{1}{4}$，又$q_5=\frac{1}{3}(1-p_5)>\frac{1}{4}$，故$p_5<q_5$.

21.（1）由题意，当直线AB垂直于x轴时$x_1=\frac{p}{2}$，代入抛物线方程得$y_1=\pm p$，则$|AB|=2p$，

所以$2p=2$，抛物线$C:y^2=2x$．

（2）（i）设$C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$，直线AB：$x=my+\frac{1}{2}$，与抛物线$C:y^2=2x$联立，

得：$y^2-2my-1=0$，因此$y_1+y_2=2m,y_1y_2=-1$.

设直线AC：$x=ny+1$，与抛物线$C:y^2=2x$联立，得：$y^2-2ny-2=0$，

因此$y_1+y_3=2n,y_1y_3=-2$，则$y_3=\frac{-2}{y_1}$．同理可得：$y_4=\frac{-2}{y_2}$．所以，

$$k_{CD}=\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=\frac{y_3-y_4}{\frac{y_3^2}{2}-\frac{y_4^2}{2}}=\frac{2}{y_3+y_4}=\frac{2}{\frac{-2}{y_1}+\frac{-2}{y_2}}=-\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{1}{2m}.$$

因此直线CD：$x=2m(y-y_3)+x_3$，由对称性知，定点在x轴上，令$y=0$得

$$x=-2my_3+x_3=-2my_3+\frac{y_3^2}{2}=-2m\frac{-2}{y_1}+\frac{1}{2}(\frac{-2}{y_1})^2=\frac{4m}{y_1}+\frac{2}{y_1^2}$$

$$=\frac{2(y_1+y_2)}{y_1}+\frac{2}{y_1^2}=2+2(\frac{y_2}{y_1}+\frac{1}{y_1^2})=2+2\cdot\frac{y_1y_2+1}{y_1^2}=2$$

所以直线CD过定点$Q(2,0)$.

（ii）因为$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|PF|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{4}|y_1-y_2|$，

$$S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}|PQ|\cdot|y_3-y_4|=\frac{1}{2}\left|\frac{-2}{y_1}-\frac{-2}{y_2}\right|=\left|\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right|=\left|\frac{y_1-y_2}{y_1y_2}\right|=|y_1-y_2|,$$

所以$S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCD}=\frac{5}{4}|y_1-y_2|=\frac{5}{4}\sqrt{4m^2+4}=\frac{5}{2}\sqrt{m^2+1}\geq\frac{5}{2}$当且仅当$m=0$时取到

最小值$\frac{5}{2}$.

22.（1）$f'(x)=(x^2-1)e^x-a$，由题意知$\begin{cases}f'(0)=-2,\\ f(0)=b,\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1,\\ b=1.\end{cases}$

（2）$f(x)=0$即$(x-1)^2e^x-x=0\Leftrightarrow(x-1)^2-\frac{x}{e^x}=0$，

函数$f(x)$有两个零点即函数$g(x)=(x-1)^2-\frac{x}{e^x}$有两个零点.

$g'(x)=(x-1)(2+\frac{1}{e^x})$，

当$x<1$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；当$x>1$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增.

又$g(0)=1>0,g(1)=-\frac{1}{e}<0,g(2)=1-\frac{2}{e^2}>0$，故$\exists x_1\in(0,1)$使得$g(x_1)=0$，

$\exists x_2\in(1,2)$使得$g(x_2)=0$，命题得证.

（3）由（1）（2）知$f(x)=(x-1)^2e^x-x$，$f'(x)=(x^2-1)e^x-1$，且$0<x_1<1<x_2<2$.要

证明 $f'(\frac{x_1+x_2}{2})>-a$，即证明 $((\frac{x_1+x_2}{2})^2-1)e^{\frac{x_1+x_2}{2}}-1>-1$，即证明 $x_1+x_2>2$.

令 $h(x)=g(x)-g(2-x)(0<x<1)$，则

$$h'(x)=g'(x)+g'(2-x)=(x-1)(2+\frac{1}{e^x})+(1-x)(2+\frac{1}{e^{2-x}})=\frac{(1-x)(e^x-e^{2-x})}{e^2}<0,$$

因此 $h(x)$ 单调递减，则 $h(x)>h(1)=0$．因此 $h(x_1)>0$，即 $g(x_1)>g(2-x_1)$，

即 $g(x_2)>g(2-x_1)$，又 $x_2, 2-x_1\in(1,2)$，且 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，

因此 $x_2>2-x_1$，即 $x_1+x_2>2$．命题得证.