2020～2021 学年度高三第六次联考·理科数学
参考答案、提示及评分细则

1. C　∵ $P=\{x||x|>1\}=\{x|x<-1$ 或 $x>1\}$，$Q=\{x|y=\sqrt{5-x^2}\}=\{x|-\sqrt{5}\leqslant x\leqslant\sqrt{5}\}$，∴ $P\cap Q=\{x|-\sqrt{5}\leqslant x<-1$ 或 $1<x\leqslant\sqrt{5}\}$. 故选 C.

2. A　$\frac{2\,020}{1+\mathrm{i}}=\frac{2\,020(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{2\,020(1-\mathrm{i})}{2}=1\,010-1\,010\mathrm{i}$. 故选 A.

3. B　"$\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得 $\frac{2}{x_0}+\ln x_0\leqslant0$"的否定是"$\forall x\in\mathbf{R}$，$\frac{2}{x}+\ln x>0$". 故选 B.

4. A　令 $a_n=a_1q^{n-1}$，则 $a_1\times(a_1q^2)\times(a_1q^{10})=8$，所以 $a_1^3q^{12}=8$，所以 $a_1q^4=2$，所以 $a_2a_8=a_1q\times a_1q^7=a_1^2q^8=(a_1q^4)^2=4$.

5. D　据题设分析知，$y=2\,020^{-\frac{x}{2}}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 故选 D.

6. B　据题设分析知，只有"若 $m\perp\beta$，$m/\!/\alpha$，则 $\alpha\perp\beta$"为真命题. 故选 B.

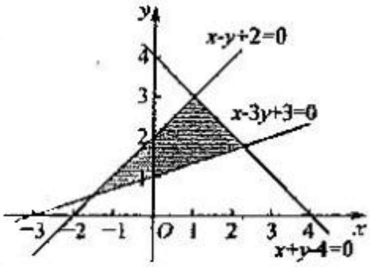
7. D　因为 $a:c=2:\sqrt{3}$，所以可设 $a=2k$，$c=\sqrt{3}k$. 又 $B=30^\circ$，所以 $\cos30^\circ=\frac{(2k)^2+(\sqrt{3}k)^2-b^2}{2\cdot2k\cdot\sqrt{3}k}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $b=k$，所以 $a^2=b^2+c^2$，所以 $A=90^\circ$，所以 $C=60^\circ$. 故选 D.

8. C　据题意，得 $\frac{(-3)^2}{a^2}-\frac{0^2}{b^2}=1$，所以 $a^2=9$. 又该双曲线的离心率等于 $\frac{\sqrt{10}}{3}$，所以 $e^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{9+b^2}{9}=\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2$，解得 $b^2=1$. 故选 C.

9. C　据题意，得 $\lambda\boldsymbol{a}=(3\lambda,2\mu)=(3\lambda,4\lambda)$，所以 $2\mu=4\lambda$，即 $\mu=2\lambda$. 又 $\mu\neq0$，所以 $\frac{\lambda^2}{\mu^2}=\frac{1}{4}$. 故选 C.

10. B　据流程图分析知，输出 x 的值为 8. 故选 B.

11. A　令 $z=4x+8y$，得 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{8}$. 画出不等式组 $\begin{cases}x-y+2\geqslant0,\\x+y-4\leqslant0,\\x-3y+3\leqslant0\end{cases}$ 表示的平面区域如图阴影部分所示，分析知，当 $x=1$，$y=3$ 时，z 取得最大值，且 $z_{max}=4\times1+8\times3=28$. 故选 A.



12. B　据题设知，直线 $l:y=-2x+p$. 据 $\begin{cases}y=-2x+p,\\y^2=2px,\end{cases}$ 得 $4x^2-6px+p^2=0$. 设 $M(x_M,y_M)$，$N(x_N,y_N)$，则 $x_M+x_N=-\frac{-6p}{4}=\frac{3p}{2}$. 又 $|MN|=\frac{5}{2}$，所以 $x_M+\frac{p}{2}+x_N+\frac{p}{2}=\frac{5p}{2}=\frac{5}{2}$，所以 $p=1$，所以所求抛物线的方程是 $y^2=2x$. 故选 B.

13. 60　$\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^6$ 的二项展开式中的第 $r+1$ 项 $T_{r+1}=C_6^r(2\sqrt{x})^{6-r}\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^r=(-1)^r\cdot2^{6-r}\cdot C_6^r\cdot x^{\frac{12-3r}{4}}$. 令 $\frac{12-3r}{4}=0$，则 $r=4$，$T_5=(-1)^4\cdot2^{6-4}\cdot C_6^4=60$.

14. $3e^2x-y-2e^2=0$　∵ $y=xe^{2x}$，∴ $y'=(2x+1)e^{2x}$，∴ 当 $x=1$ 时，$y'=3e^2$. 又当 $x=1$ 时，$y=e^2$，∴ 函数 $y=xe^{2x}$ 的图象在点 $(1,m)$ 处切线的方程为 $y-e^2=3e^2(x-1)$，即 $3e^2x-y-2e^2=0$.

15. $\frac{4\pi}{3}$　据题意，得 $\sqrt{R^2+R^2+R^2}=\sqrt{3}$，所以 $R^2=1$，所以所求球的体积 $V=\frac{4\pi}{3}$.

16. $[-\sqrt{7},\sqrt{7}]$　据题设知，圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $(x-a)^2+(y-3)^2=4$ 存在公共点，所以 $0\leqslant\sqrt{a^2+3^2}\leqslant4$，解得 $-\sqrt{7}\leqslant a\leqslant\sqrt{7}$.

17. 解：(1) ∵ $S_n=n^2-n$，

∴ 当 $n=1$ 时，$S_1=1^2-1$，即 $a_1=0$；…………………………………… 1 分

当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=(n-1)^2-(n-1)$，…………………………………… 2 分

$\therefore S_n-S_{n-1}=(n^2-n)-[(n-1)^2-(n-1)]$,

$\therefore a_n=2n-2(n\geq 2)$. …………………………………… 4分

验证知,当 $n=1$ 时,也成立. …………………………………… 5分

综上,$a_n=2n-2$. …………………………………… 6分

(2)据(1)求解知,$a_n=2n-2$.

又 $a_n+\log_3 n=\log_3 b_n$,

$\therefore 2n-2+\log_3 n=\log_3 b_n$,

$\therefore b_n=n\times 9^{n-1}$, …………………………………… 8分

$\therefore$数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=1\times 9^0+2\times 9^1+3\times 9^2+\cdots+n\times 9^{n-1}$, …………………… 9分

$\therefore 9T_n=1\times 9^1+2\times 9^2+3\times 9^3+\cdots+n\times 9^n$,

$\therefore T_n-9T_n=1\times 9^0+1\times 9^1+1\times 9^2+1\times 9^3+\cdots+1\times 9^{n-1}-n\times 9^n$, ………………… 10分

$\therefore -8T_n=\dfrac{1\times(1-9^n)}{1-9}-n\times 9^n$, …………………………………… 11分

$\therefore T_n=\dfrac{1+(8n-1)\times 9^n}{64}$. …………………………………… 12分

18. 解:(1)据题设知,所求参加竞赛学生成绩的高分率 $p=(0.025+0.005)\times 10=0.3$. ………………… 3分

(2)参加竞赛的学生成绩在范围[40,70)的有 $20\times[(0.010+0.015+0.015)\times 10]=8$(人), ………… 4分

在范围[70,100]的有 12 人. …………………………………… 5分

X 的可能取值是 0,1,2. …………………………………… 6分

$P(X=0)=\dfrac{C_8^0C_{12}^2}{C_{20}^2}=\dfrac{14}{95}$, …………………………………… 7分

$P(X=1)=\dfrac{C_8^1C_{12}^1}{C_{20}^2}=\dfrac{48}{95}$, …………………………………… 8分

$P(X=2)=\dfrac{C_8^2C_{12}^0}{C_{20}^2}=\dfrac{33}{95}$. …………………………………… 9分

X 的分布列为

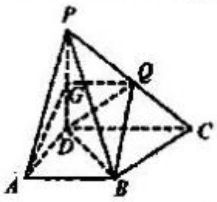
X	0	1	2
P	$\frac{14}{95}$	$\frac{48}{95}$	$\frac{33}{95}$

…………………………………… 10分

$E(X)=0\times\dfrac{14}{95}+1\times\dfrac{48}{95}+2\times\dfrac{33}{95}=\dfrac{6}{5}$(分). …………………………………… 12分

19. 证明:(1)取 PD 的中点为 G,分别连接 AG,QG. …………………………………… 1分

又因为 Q 为 PC 的中点,



所以 $GQ/\!/DC$,且 $GQ=\dfrac{1}{2}DC$. …………………………………… 2分

又因为 $AB/\!/DC$,$DC=2AB$,

所以 $GQ/\!/AB$,$GQ=AB$, …………………………………… 3分

所以四边形 $ABQG$ 是平行四边形, …………………………………… 4分

所以 $BQ/\!/AG$. …………………………………… 5分

又 $BQ\not\subset$平面 PAD,$AG\subset$平面 PAD,所以 $BQ/\!/$平面 PAD. …………………………………… 6分

解:(2)据题设知,DA,DC,DP 三条直线两两相互垂直. 以 DA,DC,DP 分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系如图,

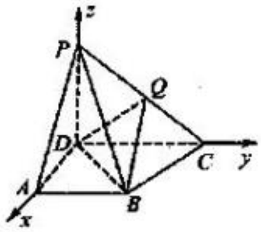
因为在四边形 $ABCD$ 中,$AB/\!/DC$,$AD\perp DC$,$DC=2AB$,

所以点 B 在线段 CD 的垂直平分线上.

又因为 $BC=\sqrt{2}$,$BC\perp BD$,

所以 $BD=BC=\sqrt{2}$,$CD=2$, …………………………………… 7分

所以有点 $D(0,0,0)$,$B(1,1,0)$,$C(0,2,0)$,



所以$\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$.

即平面 PBD 的一个法向量$\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$. ································ 8分

据题设知,点 Q 坐标为$\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$,

所以$\overrightarrow{DQ}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{BQ}=\left(-1,0,\frac{1}{2}\right)$. ································ 9分

设平面 BDQ 的一个法向量 $m=(x,y,z)$,则$\begin{cases}0\times x+1\times y+\frac{1}{2}\times z=0,\\-1\times x+0\times y+\frac{1}{2}\times z=0.\end{cases}$

令 $z=2$,得 $m=(1,-1,2)$, ································ 10分

所以 $\cos\langle m,\overrightarrow{BC}\rangle=\frac{m\cdot\overrightarrow{BC}}{|m||\overrightarrow{BC}|}=\frac{(1,-1,2)\cdot(-1,1,0)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\times\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. ································ 11分

又二面角 $Q-BD-P$ 的平面角为锐角,

所以二面角 $Q-BD-P$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$. ································ 12分

20.解:(1)因为以椭圆 C 的顶点为顶点的四边形面积是 $4\sqrt{3}$,

所以 $4\times\frac{1}{2}ab=4\sqrt{3}$,即 $ab=2\sqrt{3}$. ································ 1分

又因为$\frac{a^2-b^2}{a^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, ································ 2分

所以 $a^2=4$,$b^2=3$, ································ 3分

所以所求椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ································ 4分

(2)若直线 l 的斜率不存在,则据$\begin{cases}x=1,\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\y=\frac{3}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}x=1,\\y=-\frac{3}{2}.\end{cases}$ ································ 5分

不妨设 $A\left(1,\frac{3}{2}\right)$,$B\left(1,-\frac{3}{2}\right)$,于是 $3|AB|-4|AF|\times|BF|=3\times\left[\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)\right]-4\times\frac{3}{2}\times\left|-\frac{3}{2}\right|=0$,即 $3|AB|=4|AF|\times|BF|$; ································ 6分

若直线 l 的斜率存在,设其方程为 $y=k(x-1)$.

据$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\y=k(x-1),\end{cases}$得$(3+4k^2)x^2-8k^2x+(4k^2-12)=0$. ································ 7分

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$. ································ 8分

所以 $3|AB|=3\times\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{36(1+k^2)}{3+4k^2}$, ································ 9分

$$4|AF|\times|BF|=4\times\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}\times\sqrt{(x_2-1)^2+y_2^2}$$
$$=4\times\sqrt{(x_1-1)^2+k^2(x_1-1)^2}\times\sqrt{(x_2-1)^2+k^2(x_2-1)^2}$$
$$=4\times(1+k^2)\times|x_1-1|\times|x_2-1|$$
$$=4\times(1+k^2)\times|x_1x_2-(x_1+x_2)+1|$$
$$=4\times(1+k^2)\times\left|\frac{4k^2-12}{3+4k^2}-\frac{8k^2}{3+4k^2}+1\right|$$
$$=\frac{36(1+k^2)}{3+4k^2}.$$ ································ 11分

综上,$3|AB|=4|AF|\times|BF|$. ································ 12分

21.解:(1)因为 $f(x)=e^x(ax-1)$,所以 $f'(x)=e^x(ax+a-1)$. ································ 1分

当 $a=0$ 时,$f'(x)<0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 成立,

所以 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减; ································ 2分

当 $a>0$ 时，$f(x)$在$\left(\frac{1}{a}-1,+\infty\right)$上单调递增，在$\left(-\infty,\frac{1}{a}-1\right)$上单调递减；……3 分

当 $a<0$ 时，即 $f(x)$在$\left(-\infty,\frac{1}{a}-1\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{a}-1,+\infty\right)$上单调递减. ……4 分

(2)因为存在 $x\in(-\infty,0)$，使得 $f(x)<g(x)$成立，

所以存在 $x\in(-\infty,0)$，使得 $a(xe^x-x+1)<e^x$ 成立. ……5 分

令 $y=xe^x-x+1$，

所以 $y'=xe^x+e^x-1$.

当 $x<0$ 时，$y'<0$，

所以 $y=xe^x-x+1$ 在$(-\infty,0)$上单调递减. ……6 分

又当 $x=0$ 时，$y=1$，

所以当 $x<0$ 时，$y>0$. ……7 分

所以存在 $x\in(-\infty,0)$，使得 $a<\frac{e^x}{xe^x-x+1}$成立，……8 分

设 $G(x)=\frac{e^x}{xe^x-x+1}$，则 $G'(x)=\frac{e^x(2-x-e^x)}{(xe^x-x+1)^2}$. ……9 分

分析知，当 $x<0$ 时，$2-x-e^x>0$，即当 $x<0$ 时，$G'(x)>0$.

所以 $G(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增. ……10 分

又 $G(0)=1$，

所以当 $x\in(-\infty,0)$时，$G(x)<1$，……11 分

所以 $a<1$，即所求实数 a 的取值范围是$(-\infty,1)$. ……12 分

22. 解：(1)直线 l 的普通方程为 $x+y-4=0$. ……2 分

由 $\rho=6\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$，得 $\rho^2=6\rho\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)$，……3 分

所以 $\rho^2=3\sqrt{3}\rho\cos\theta+3\rho\sin\theta$，……4 分

故曲线 C 的直角坐标方程为$\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=9$. ……5 分

(2)据(1)求解知，曲线 C：$\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=9$.

令 $x-\frac{3\sqrt{3}}{2}=3\sin\theta$，$y-\frac{3}{2}=3\cos\theta$，……6 分

则 $x+y=3\sin\theta+3\cos\theta+\frac{3\sqrt{3}+3}{2}=3\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3\sqrt{3}+3}{2}$. ……8 分

所以 $x+y$ 的取值范围是$\left[\frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{2}+3}{2},\frac{3\sqrt{3}+6\sqrt{2}+3}{2}\right]$. ……10 分

23. 解：(1)∵$f(x)<0$，

∴$|2x+1|-|2x-2|<0$，……1 分

∴$(2x+1)^2<(2x-2)^2$，……3 分

∴$12x<3$，……4 分

∴$x<\frac{1}{4}$，即所求不等式的解集为$\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$. ……5 分

(2)∵$f(x)=|2x+1|-|2x-2|$，

∴$f(x)_{max}=3$，……7 分

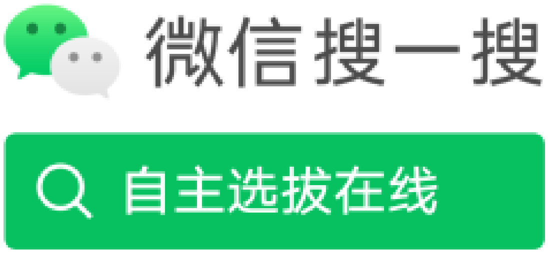
又 $f(x)\leqslant a-2$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 成立，则 $3\leqslant a-2$，……9 分

解得 $a\geqslant5$，故实数 a 的取值范围是$[5,+\infty)$. ……10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》