2021年浙江省高考数学卷全卷解析

祝愿2021届考生金榜题名

一、选择题

【1】设集合 $A=\{x\mid x\geq 1\}$，$B=\{x\mid -1<x<2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

$A.\{x\mid x>-1\}$　$B.\{x\mid x\geq 1\}$　$C.\{x\mid -1<x<1\}$　$D.\{x\mid 1\leq x<2\}$

【答案】D

【2】已知 $a\in R$，$(1+ai)i=3+i$（i 为虚数单位），则 $a=$（　　）

$A.-1$　$B.1$　$C.-3$　$D.3$

【答案】C

【3】已知非零向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ 是“$\vec{a}=\vec{b}$”的（　　）

$A.$ 充分不必要条件　$B.$ 必要不充分条件

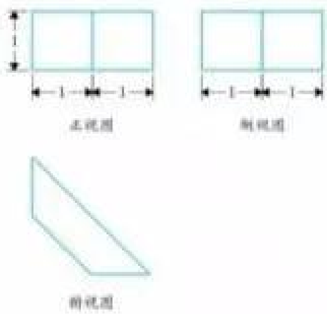
$C.$ 充分必要条件　$D.$ 既不充分也不必要条件

【答案】B

【4】某几何体的三视图如图所示（单位：cm），则该几何体的体积（单位：cm^3）是（　　）

$A.\dfrac{3}{2}$　$B.3$　$C.\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　$D.3\sqrt{2}$

【答案】A



（第4题图）

【5】若实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+1\geq 0\\ x-y\leq 0\\ 2x+3y-1\leq 0\end{cases}$，则 $z=x-\dfrac{1}{2}y$ 的最小值是（　　）

$A.-2$　$B.-\dfrac{3}{2}$　$C.-\dfrac{1}{2}$　$D.\dfrac{1}{10}$

【答案】B

【解析】$\because \begin{cases} x+1\ge 0 & ① \\ x-y\le 0 & ② \\ 2x+3y-1\le 0 & ③ \end{cases}$，①×8-③$\Rightarrow 6x-3y+9\ge 0\Rightarrow x-\frac{y}{2}\ge -\frac{3}{2}$

$x=-1,y=1$时取“=”，故选B

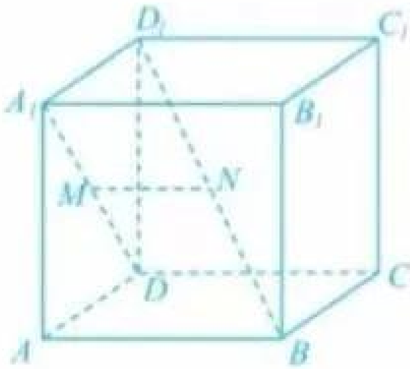
【6】如图，已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，M,N分别是A_1D，D_1B的中点，则（　　）

$A.$直线A_1D与直线D_1B垂直，直线MN//平面$ABCD$

$B.$直线A_1D与直线D_1B平行，直线$MN\perp$平面BDD_1B_1

$C.$直线A_1D与直线D_1B相交，直线MN//平面$ABCD$

$D.$直线A_1D与直线D_1B异面，直线$MN\perp$平面BDD_1B_1



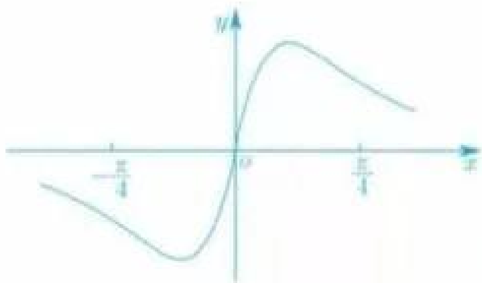
（第6题图）

【答案】A

【7】已知函数$f(x)=x^2+\frac{1}{4}$，$g(x)=\sin x$，则图象为右图的函数可能是（　　）

$A.y=f(x)+g(x)-\frac{1}{4}$　　$B.y=f(x)-g(x)-\frac{1}{4}$

$C.y=f(x)g(x)$　　$D.y=\frac{g(x)}{f(x)}$



（第7题图）

【答案】D

【解析】易知右图表示的是奇函数，而

$y=f(x)+g(x)-\frac{1}{4}=x^2+\sin x$与$y=f(x)-g(x)-\frac{1}{4}=x^2-\sin x$均为非奇非偶函数，

排除AB

对于$C,y=f(x)g(x)=\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\sin x$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，与图象不符，舍去.

故选D

【8】已知α,β,γ是三个锐角，则$\sin\alpha\cos\beta,\sin\beta\cos\gamma,\sin\gamma\cos\alpha$中，大于$\frac{1}{2}$的数至多有（　　）

A．0个　　B．1个　　C．2个　　D．3个

【答案】C

【解析】假设$\sin\alpha\cos\beta,\sin\beta\cos\gamma,\sin\gamma\cos\alpha$均大于$\frac{1}{2}$

即$\sin\alpha\cos\beta>\frac{1}{2}$，$\sin\beta\cos\gamma>\frac{1}{2}$，$\sin\gamma\cos\alpha>\frac{1}{2}$

则$(\sin\alpha\cos\beta)\cdot(\sin\beta\cos\gamma)\cdot(\sin\gamma\cos\alpha)>\frac{1}{8}$

而另一方面

$(\sin\alpha\cos\beta)(\sin\beta\cos\gamma)(\sin\gamma\cos\alpha)=(\sin\alpha\cos\alpha)(\sin\beta\cos\beta)(\sin\gamma\cos\gamma)$

$=\frac{1}{2}\sin2\alpha\cdot\frac{1}{2}\sin2\beta\cdot\frac{1}{2}\sin2\gamma=\frac{1}{8}\sin2\alpha\cdot\sin2\beta\cdot\sin2\gamma\le\frac{1}{8}$矛盾

故$\sin\alpha\cos\beta,\sin\beta\cos\gamma,\sin\gamma\cos\alpha$不可能均大于$\frac{1}{2}$

而取$\beta=\frac{\pi}{4},\alpha=\frac{\pi}{3},\gamma=\frac{\pi}{6}$知$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{6}}{4}>\frac{1}{2}$且$\sin\beta\cos\gamma=\frac{\sqrt{6}}{4}>\frac{1}{2}$

$\therefore$大于$\frac{1}{2}$的数至多有2个，选C.

【9】已知$a,b\in R$，$ab>0$，函数$f(x)=ax^2+b(x\in R)$.

若$f(s-t),f(s),f(s+t)$成等比数列，则平面上点(s,t)的轨迹是（　　）

A．直线和圆　　B．直线和椭圆　　C．直线和双曲线　　D．直线和抛物线

【答案】C

【解析】 $\because f(s-t),f(s),f(s+t)$成等比数列

$\therefore f^2(s)=f(s-t)\cdot f(s+t)\Rightarrow\left[a(s-t)^2+b\right]\left[a(s+t)^2+b\right]=(as^2+b)^2$

$\Rightarrow a^2(s^2-t^2)^2+ab(2s^2+2t^2)+b^2=a^2s^4+2abs^2+b^2$

$\Rightarrow a^2(s^4-2s^2t^2+t^4)+2abs^2+2abt^2+b^2=a^2s^4+2abs^2+b^2$

$\therefore a^2t^4-2a^2s^2t^2+2abt^2=0\Rightarrow at^4-2as^2t^2+2bt^2=0\Rightarrow t^2(at^2-2as^2+2b)=0$

当$t=0$时，(s,t)的轨迹是直线；　当$at^2-2as^2+2b=0$时，$2s^2-t^2=\dfrac{2b}{a}>0$，即

$\dfrac{s^2}{\frac{b}{a}}-\dfrac{t^2}{\frac{2b}{a}}=1$　此时(s,t)的轨迹是双曲线，综上：选C.

【10】 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}(n\in N^*)$，记数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，则（　　）

A．$\dfrac{5}{2}<S_{100}<3$　　B．$3<S_{100}<4$　　C．$4<S_{100}<\dfrac{9}{2}$　　D．$\dfrac{9}{2}<S_{100}<5$

【答案】 A

【解析】 首先易知$a_n>0$，$\therefore a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}<a_n$，$\{a_n\}$单调递减，故$a_n\le 1$，

一方面，由$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}\Rightarrow a_{n+1}+a_{n+1}\sqrt{a_n}=a_n$，$\therefore a_{n+1}=\dfrac{a_n-a_{n+1}}{\sqrt{a_n}}$

而$\sqrt{a_n}>\dfrac{1}{2}(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}})$，$\therefore a_{n+1}<\dfrac{a_n-a_{n+1}}{\frac{1}{2}(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}})}=2(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}})$

$\therefore S_{100}<1+2(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}+\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}+\cdots+\sqrt{a_{99}}-\sqrt{a_{100}})$

$=1+2(1-\sqrt{a_{100}})<3$　　另一方面，易知$n\ge 2$时，$a_n\le\dfrac{1}{2}$

先证明：$n\ge 2$时，$\sqrt{a_n}<\dfrac{7}{12}\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}\right)\Leftrightarrow 5\sqrt{a_n}<7\sqrt{a_{n+1}}\Leftrightarrow 25a_n<49a_{n+1}$

即：$25a_n<49\cdot\dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}\Leftrightarrow\sqrt{a_n}<\dfrac{24}{25}(n\ge 2)$显然成立.

当$n\ge 2$，$a_{n+1}>\dfrac{a_n-a_{n+1}}{\dfrac{7}{12}\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}\right)}=\dfrac{12}{7}\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}}\right)$

且由$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1+\sqrt{a_n}}{a_n}=\dfrac{1}{a_n}+\sqrt{\dfrac{1}{a_n}}\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\sqrt{\dfrac{1}{a_n}}\ge 1$

$$\therefore\begin{cases}\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_1}\ge 1\\ \dfrac{1}{a_3}-\dfrac{1}{a_2}\ge 1\\ \quad\vdots\\ \dfrac{1}{a_{100}}-\dfrac{1}{a_{99}}\ge 1\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{a_{100}}\ge 100\Rightarrow a_{100}\le\frac{1}{100}$$

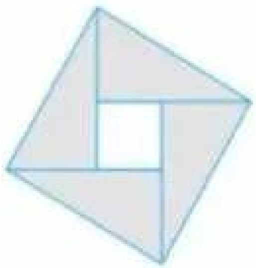
$\therefore S_{100}>1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{12}{7}\left(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}+\sqrt{a_3}-\sqrt{a_4}+\cdots+\sqrt{a_{99}}-\sqrt{a_{100}}\right)$

$=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{6\sqrt{2}}{7}-\dfrac{12}{7}\sqrt{a_{100}}\ge\dfrac{3}{2}+\dfrac{6\sqrt{2}}{7}-\dfrac{6}{35}>\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow 6\sqrt{2}>8.2$显然成立，

故$\dfrac{5}{2}<S_{100}<3$，选 A

二、填空题

【11】我国古代数学家赵爽用弦图给出了勾股定理的证明，弦图是由四个全等的直角三角形和中间的一个小正方形拼成的一个大正方形（如图所示）.若直角三角形直角边的长分别为$3,4$，记大正方形的面积为S_1，小正方形的面积为S_2，则$\dfrac{S_1}{S_2}=$______



(第 11 题图)

【答案】25

【12】已知$a\in R$，函数$f(x)=\begin{cases}x^2-4, & x>2\\ |x-3|+a, & x\le 2\end{cases}$.若$f\left(f\left(\sqrt{6}\right)\right)=3$，则$a=$______

【答案】2

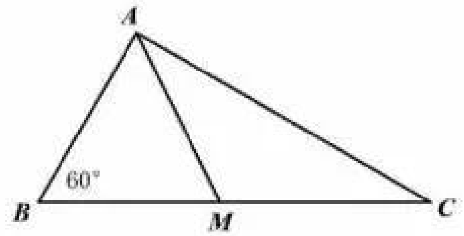
【13】已知多项式$(x-1)^3+(x+1)^4=x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$，则$a_1=$______；$a_2+a_3+a_4=$________.

【答案】5；10

【解析】$a_1=C_3^0\cdot(-1)^0+C_4^1\cdot 1=5$

在原式中，令$x=1$得$1+a_1+a_2+a_3+a_4=16$，$\therefore a_2+a_3+a_4=10$

【14】在ΔABC中，$\angle B=60^\circ$，$AB=2$，M是BC的中点，$AM=2\sqrt{3}$，则$AC=$_____；$\cos\angle MAC=$_____.



【答案】$2\sqrt{13}$；$\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$

【解析】在ΔABM中，由余弦定理$\Rightarrow 4+BM^2-4\cdot BM\cdot\dfrac{1}{2}=12$

$\therefore BM^2-2BM-8=0, BM=4, \therefore BC=8$

$\therefore AC=\sqrt{4+64-2\times2\times8\times\dfrac{1}{2}}=2\sqrt{13}$

$\cos\angle MAC=\dfrac{12+52-16}{2\cdot2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{13}}=\dfrac{48}{8\sqrt{39}}=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$

【15】袋中有4个红球，m个黄球，n个绿球.现从中任取两个球，记取出的红球数为ξ，若取出的两个球都是红球的概率为$\dfrac{1}{6}$，一红一黄的概率为$\dfrac{1}{3}$，则$m-n=$___，$E(\xi)=$______.

【答案】$1;\dfrac{8}{9}$

由题意知 $\dfrac{C_4^2}{C_{m+n+4}^2}=\dfrac{1}{6}\Rightarrow C_{m+n+4}^2=36$，$\therefore(m+n+4)(m+n+3)=72$，$m+n=5$

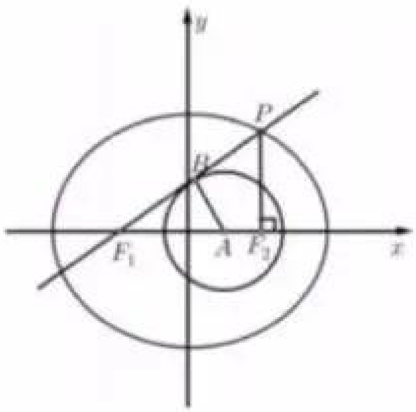
由抽到一红一黄的概率为 $\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{C_4^1\cdot C_m^1}{C_{m+n+4}^2}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore\dfrac{4m}{36}=\dfrac{1}{3},m=3$，$n=2$ $\therefore m-n=1$

ξ 的所有可能取值为 0,1,2

$$P(\xi=0)=\frac{C_5^2}{C_9^2}=\frac{5}{18},P(\xi=1)=\frac{C_4^1C_5^1}{C_9^2}=\frac{5}{9},P(\xi=2)=\frac{1}{6}$$

$$\therefore E(\xi)=0\times\frac{5}{18}+1\times\frac{5}{9}+2\times\frac{1}{6}=\frac{8}{9}$$

【16】 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，焦点 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)(c>0)$.若过 F_1 的直线和圆 $\left(x-\dfrac{1}{2}c\right)^2+y^2=c^2$ 相切，与椭圆的第一象限交于点 P，且 $PF_2\perp x$ 轴，则该直线的斜率是_______，椭圆的离心率是______.



【答案】$\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

PF_1 和圆 A 相切 $\therefore AB=r=c$,而 $A(\dfrac{c}{2},0),F_1(-c,0)$ $\therefore AF_1=\dfrac{3c}{2}$

$\therefore BF_1=\sqrt{\dfrac{9}{4}c^2-c^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}c$ $\therefore$ 直线的斜率为 $\tan\angle AF_1B=\dfrac{c}{\frac{\sqrt{5}}{2}c}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

由 $PF_2 \perp x$ 轴，知 $PF_2=\dfrac{b^2}{a}$　而 $F_1F_2=2c$

$$\therefore \tan\angle PF_1F_2=\frac{\frac{b^2}{a}}{2c}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\frac{a^2-c^2}{2ac}=\frac{2\sqrt{5}}{5},\quad 5a^2-5c^2=4\sqrt{5}ac$$

$$5e^2+4\sqrt{5}e-5=0\Rightarrow(5e-\sqrt{5})(e+\sqrt{5})=0,\quad e=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

【17】已知平面向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}(\vec{c}\neq 0)$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$，记平面向量 $\boldsymbol{d}$ 在 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向上的投影分别为 x,y，$\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 方向上的投影为 z，则 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值是__________.

【答案】 $\dfrac{2}{5}$

【解析】 设 $\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(0,2)$，则 $\vec{a}-\vec{b}=(1,-2)$，由 $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=0$，可设 $\vec{c}=(2m,m)$

而 $\vec{d}=(x,y)$，$\therefore \vec{d}-\vec{a}=(x-1,y)$，$\because \vec{d}-\vec{a}$ 在 $\vec{c}$ 上的投影为 z

$$\therefore z=\frac{(\vec{d}-\vec{a})\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|}=\frac{2m(x-1)+my}{\sqrt{5}|m|}=\frac{(2x+y-2)m}{\sqrt{5}|m|}$$

$$\therefore x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+\frac{(2x+y-2)^2}{5}=x^2+\frac{|y|^2}{1}+\frac{|2x+y-2|^2}{5}$$

$$\geq x^2+\frac{(|y|+|2x+y-2|)^2}{6}\geq x^2+\frac{|2x-2|^2}{6}=\frac{5}{3}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}\geq\frac{2}{5}$$

当 $x=\dfrac{2}{5},y=\dfrac{1}{5}$ 时取“=”，故应填：$\dfrac{2}{5}$

注释：中间有一步使用了权方和不等式，即 $a,b,c,d>0$**，则** $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{d^2}{c}\geq\dfrac{(b+d)^2}{a+c}$**，当且仅当** $\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$ **时取“=”．**

三、解答题

【18】（本题满分14分）设函数 $f(x)=\sin x+\cos x(x\in R)$.

（Ⅰ）求函数 $y=\left[f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求函数 $y=f(x)f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值.

【解析】

（Ⅰ）$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x-\sin x$

$g=\left[f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2=(\cos x-\sin x)^2=1-\sin 2x$ ，

$\therefore y$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$

（Ⅱ）$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，

$y=(\sin x+\cos x)\cdot\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x\cos x$

$=\sqrt{2}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2x-\cos 2x)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

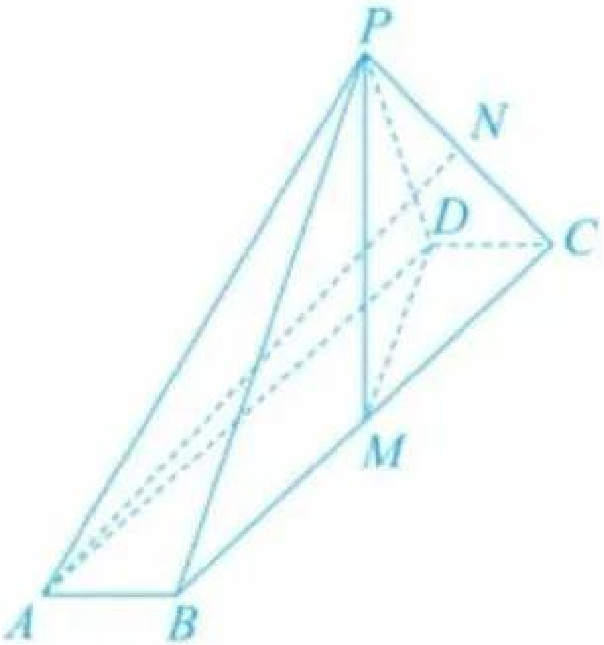
当 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 时，$-\frac{\pi}{4}\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}$，$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\le 1$

$\therefore 0\le y\le 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，综上 y 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【19】（本题满分15分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle ABC=120^{\circ}$，$AB=1$，$BC=4$，$PA=\sqrt{15}$，M,N 分别为 BC,PC 的中点，$PD\perp DC$，$PM\perp MD$.

（Ⅰ）证明：$AB\perp PM$；

（Ⅱ）求直线 AN 与平面 PDM 所成角的正弦值.



【解析】

（Ⅰ）证明：$\because M$ 为 BC 的中点，$BC=4$，$\therefore CM=2$

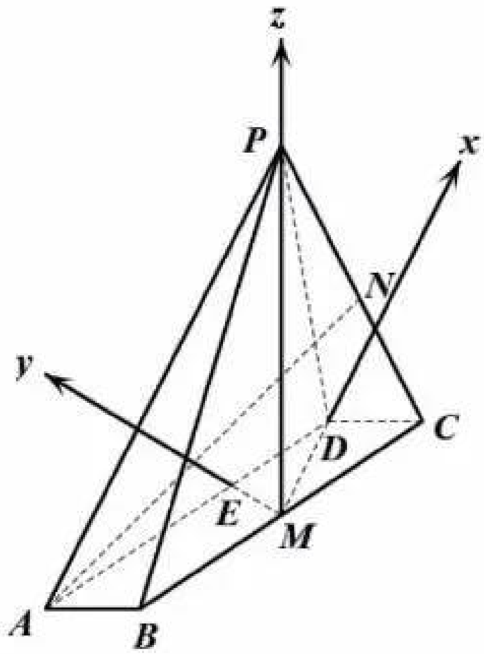
在 $\triangle CDM$ 中，$\angle MCD=60^{\circ}$，$CD=1$，$DM=\sqrt{1+4-2\cdot 2\cdot 1\cdot\cos 60^{\circ}}=\sqrt{3}$

$\therefore CD^2+DM^2=4=CM^2$，$\therefore \angle CDM=90^{\circ}$，$CD\perp DM$

又 $\because PD\perp DC$，$DM\cap PD=D$，$\therefore CD\perp$ 平面 PDM，$\therefore CD\perp PM$

$\because AB\,//\,CD$，$\therefore AB\perp PM$

（Ⅱ）



$\because PM\perp MD$，$PM\perp CD$，$MD\cap CD=D$，$MD,CD\subset$平面$ABCD$

$\therefore PM\perp$平面$ABCD$，又$\because CD\perp DM$

过M作$ME\parallel CD$交AD于点E，则$ME\perp MD$

如图分别以MD,ME,MP所在的直线为x,y,z轴建立空间直角坐标系

在$\triangle ABM$中，$AM=\sqrt{1+4-2\cdot1\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{7}$，$\therefore PM=\sqrt{15-7}=2\sqrt{2}$

$\therefore P(0,0,2\sqrt{2})$，$C(\sqrt{3},-1,0)$，$A(-\sqrt{3},2,0)$

$\because N$为PC的中点，$\therefore N\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$，$\therefore \overrightarrow{AN}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{5}{2},\sqrt{2}\right)$

而平面PDM的一个法向量$\vec{n}=(0,1,0)$

设AN与平面PDM所成角为θ，$\overrightarrow{AN}$与$\vec{n}$所成角为φ

$$\therefore \sin\theta=|\cos\varphi|=\left|\frac{\overrightarrow{AN}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AN}||\vec{n}|}\right|=\frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{6}$$

【20】（本题满分 15 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=-\dfrac{9}{4}$，且 $4S_{n+1}=3S_n-9\left(n\in N^*\right)$

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（Ⅱ）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $3b_n+(n-4)a_n=0\left(n\in N^*\right)$，记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n.若 $T_n\le\lambda b_n$ 对任意 $n\in N^*$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围.

【解析】

（Ⅰ）$4S_{n+1}=3S_n-9$①　　当 $n\ge2$ 时，$4S_n=3S_{n-1}-9$②

①−②$\Rightarrow 4a_{n+1}=3a_n(n\ge2)$，在①式中令 $n=1\Rightarrow 4\left(-\dfrac{9}{4}+a_2\right)=-\dfrac{27}{4}-9$

$\therefore a_2=-\dfrac{27}{16}$ 满足 $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{3}{4}$，$\therefore\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{3}{4}$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立

$\therefore\{a_n\}$ 为等比数列，且首项为 $-\dfrac{9}{4}$，公比为 $\dfrac{3}{4}$　　$a_n=-\dfrac{9}{4}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}=-3\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

（Ⅱ）由 $3b_n+(n-4)a_n=0\Rightarrow b_n=(n-4)\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

$$\therefore T_n=(-3)\cdot\frac{3}{4}+(-2)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+(-1)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots+(n-5)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+(n-4)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

①

$$\frac{3}{4}T_n=(-3)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+(-2)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots+(n-6)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+(n-5)\left(\frac{3}{4}\right)^n+(n-4)\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

②

$$①-②\Rightarrow\frac{1}{4}T_n=-\frac{9}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^n-(n-4)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

$$=-\frac{9}{4}+\frac{\frac{9}{16}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{3}{4}}-(n-4)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}=-n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}，\therefore T_n=-4n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

由$T_n \le \lambda b_n \Rightarrow -4n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \le \lambda\cdot(n-4)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n} \Rightarrow (n-4)\lambda \ge -3n$

当$1 \le n < 4$时，$\lambda \le \left(\frac{-3n}{n-4}\right)_{\min} = 1$；当$n=4$时，不等式显然成立；

当$n>4$时，$\lambda \ge \frac{-3n}{n-4}$

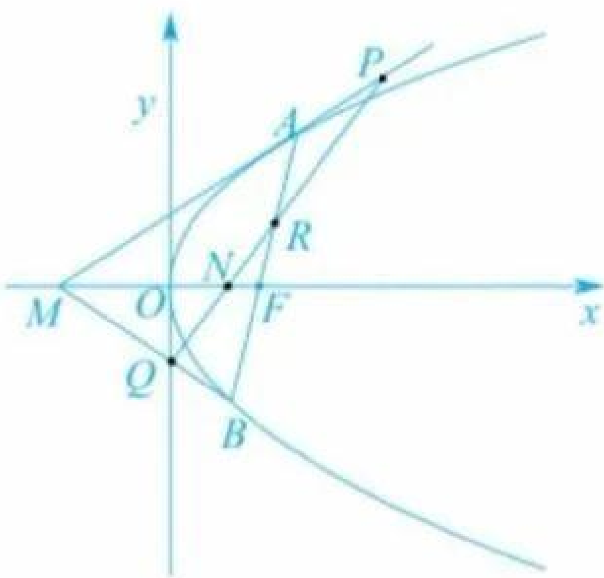
而$\frac{-3n}{n-4} = \frac{-3(n-4)-12}{n-4} = -3-\frac{12}{n-4} < -3$，$-3-\frac{12}{n-4}$关于$n$单调递增

$n \to +\infty$时，$-3-\frac{12}{n-4} \to -3$，$\therefore \lambda \ge -3$　　综上：$-3 \le \lambda \le 1$

【21】如图，已知F是抛物线$y^2 = 2px(p>0)$的焦点，M是抛物线的准线与x轴的交点，且$|MF| = 2$.

（Ⅰ）求抛物线方程.

（Ⅱ）设过点F的直线交抛物线于A,B两点，若斜率为2的直线l与直线MA,MB,AB,x轴依次交于点P,Q,R,N，且满足$|RN|^2 = |PN|\cdot|QN|$，求直线l在x轴上截距的取值范围.



【解析】

（Ⅰ）由题意知 $p=2$，抛物线方程为 $y^2=4x$

（Ⅱ）设直线 AB 的方程为 $x=ty+1$

$$\begin{cases}x=ty+1\\y^2=4x\end{cases}\Rightarrow y^2-4ty-4=0,\quad A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),M(-1,0)$$

设直线 l 的方程为：$y=2x+m$

$$\begin{cases}y=2x+m\\x=ty+1\end{cases}\Rightarrow y=\frac{2+m}{1-2t}\left(t\neq\frac{1}{2}\right),\quad \therefore R\left(\frac{mt+1}{1-2t},\frac{m+2}{1-2t}\right),N\left(-\frac{m}{2},0\right)$$

$$\therefore NR^2=\left(\frac{mt+1}{1-2t}+\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{m+2}{1-2t}\right)^2=\left[\frac{m+2}{2(1-2t)}\right]^2+\left(\frac{m+2}{1-2t}\right)^2=\frac{5}{4}\cdot\frac{(m+2)^2}{(1-2t)^2}$$

直线 PM 的方程为：$y=\frac{y_1}{x_1+1}(x+1)$

$$联立\begin{cases}y=\frac{y_1}{x_1+1}(x+1)\\y=2x+m\end{cases}\Rightarrow y_P=\frac{(2-m)y_1}{2x_1+2-y_1}=\frac{(2-m)y_1}{2ty_1+4-y_1}$$

同理 $y_Q=\frac{(2-m)y_2}{2ty_2+4-y_2}$

$$\therefore NP\cdot NQ=\sqrt{1+\frac{1}{4}}|y_P|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}}\cdot|y_Q|=\frac{5}{4}\cdot\frac{(2-m)^2y_1y_2}{[(2t-1)y_1+4][(2t-1)y_2+4]}$$

$$=\frac{5}{4}\cdot\frac{4(2-m)^2}{(2t-1)^2y_1y_2+(8t-4)(y_1+y_2)+16}$$

$$=\frac{5(2-m)^2}{(2t-1)^2(-4)+(8t-4)\cdot4t+16}=\frac{5(2-m)^2}{16t^2+12}$$

$$\because |NR|^2=|NP|\cdot|NQ|$$

$$\therefore\frac{5}{4}\cdot\frac{(m+2)^2}{(1-2t)^2}=\frac{5(2-m)^2}{16t^2+12}\Rightarrow\frac{(m+2)^2}{(m-2)^2}=\frac{(1-2t)^2}{4t^2+3}$$，令 $1-2t=s$

$\therefore 0<\frac{(1-2t)^2}{4t^2+3}=\frac{s^2}{s^2-2s+4}=\frac{1}{\frac{4}{s^2}-\frac{2}{s}+1}\le\frac{4}{3}$

$\therefore\left(\frac{m+2}{m-2}\right)^2\le\frac{4}{3}\Rightarrow m\ge 14+8\sqrt{3}$ 或 $m\le 14-8\sqrt{3}$ 且 $m\ne -2$

故直线 l 在 x 轴上截距 $-\frac{m}{2}$ 的取值范围为：

$(-\infty,-7-4\sqrt{3}]\cup[-7+4\sqrt{3},1)\cup(1,+\infty)$

注释：本题也可以将直线 l 的方程设为：$y=2(x-m)$，最后可直接算出 m 的范围.

【22】设 a,b 为实数，且 $a>1$，函数 $f(x)=a^x-bx+e^2(x\in R)$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若对任意 $b>2e^2$，函数 $f(x)$ 有两个不同的零点，求 a 的取值范围；

（Ⅲ）当 $a=e$ 时，证明：对任意 $b>e^4$，函数 $f(x)$ 有两个不同的零点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，且满足 $x_2>\frac{b\ln b}{2e^2}x_1+\frac{e^2}{b}$.（注：$e=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数）

【解析】

（Ⅰ）$f'(x)=a^x\ln a-b$

当 $b\le 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 R 上单调递增，此时 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$，无递减区间.

当 $b>0$ 时，令 $f'(x)=0\Rightarrow x=\log_a\frac{b}{\ln a}$

且当 $x<\log_a\frac{b}{\ln a}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x>\log_a\frac{b}{\ln a}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,\log_a\frac{b}{\ln a})$，单调递增区间为 $(\log_a\frac{b}{\ln a},+\infty)$

（Ⅱ）**解法一：常规处理**

由（Ⅰ）知，当$b>2e^2$时，$f(x)_{\min}=f\left(\log_a\dfrac{b}{\ln a}\right)=\dfrac{b}{\ln a}-b\log_a\dfrac{b}{\ln a}+e^2$

注意到$x\to-\infty$时，$f(x)\to+\infty$；当$x\to+\infty$，$f(x)\to+\infty$

要使$f(x)$有两个零点，只需$\dfrac{b}{\ln a}-b\log_a\dfrac{b}{\ln a}+e^2<0$对任意的$b>2e^2$恒成立

令$g(b)=\dfrac{b}{\ln a}-b\log_a\dfrac{b}{\ln a}+e^2<0$

$g'(b)=\dfrac{1}{\ln a}-\dfrac{1}{\ln a}(\ln b+1)+\log_a(\ln a)=\log_a(\ln a)-\log_a b$

①当$\ln a\le 2e^2$时，$g'(b)<0$，$g(b)$在$(2e^2,+\infty)$上单调递减

$\therefore\dfrac{2e^2}{\ln a}-2e^2\log_a\dfrac{2e^2}{\ln a}+e^2\le 0$，$\dfrac{2}{\ln a}-2\log_a\dfrac{2e^2}{\ln a}+1\le 0$

$2\log_a e-2\log_a\dfrac{2e^2}{\ln a}+1\le 0$，$\log_a\dfrac{\ln a}{2e}\le-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{\ln a}{2e}\le a^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore a^{\frac{1}{2}}\ln a\le 2e\Rightarrow 1<a\le e^2$

②当$\ln a>2e^2$时，令$g'(b)=0\Rightarrow b=\ln a$

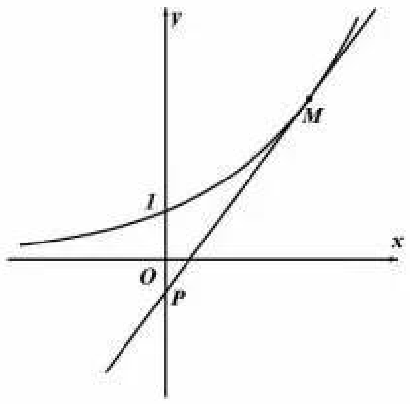
且当$2e^2<b<\ln a$时，$g'(b)>0$，$g(b)$单调递增

当$b>\ln a$时，$g'(b)<0$，$g(b)$单调递减

$\therefore g(b)_{\max}=g(\ln a)=1+e^2>0$与题设矛盾，舍去

综上：实数a的取值范围为$(1,e^2]$

解法二：数形结合



令 $a^x-bx+e^2=0\Rightarrow a^x=bx-e^2$

设 $g(x)=a^x$，$h(x)=bx-e^2$，问题转化为对任意的 $b\geq 2e^2$，$g(x)$ 与 $h(x)$ 总有两个不同的交点. $p(0,-e^2)$，$g'(x)=a^x\ln a$

设 $g(x)$ 与 $h(x)$ 切于 $M(x_0,a^{x_0})$，切线 PM 方程为 $y-a^{x_0}=a^{x_0}\ln a(x-x_0)$

$\therefore -e^2-a^{x_0}=a^{x_0}\ln a(-x_0)\Rightarrow e^2+a^{x_0}=x_0a^{x_0}\ln a=a^{x_0}\ln a^{x_0}$，令 $a^{x_0}=t(t>1)$

$\therefore t\ln t-t=e^2$，易知 $t=e^2$，$\therefore a^{x_0}=e^2$

综合图像知 $a^{x_0}\ln a\leq 2e^2$，$\ln a\leq 2\Rightarrow 1<a\leq e^2$

（Ⅲ）$a=e$ 时，$f(x)=e^x-bx+e^2$，$f'(x)=e^x-b$，令 $f'(x)=0\Rightarrow x=\ln b$

且当 $x<\ln b$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减

当 $x>\ln b$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增

$\therefore f(x)_{\min}=f(\ln b)=b-b\ln b+e^2=b(1-\ln b)+e^2<-3b+e^2<-3e^4+e^2<0$

注意到 $f(0)=1+e^2>0$，$f(b)=e^b-b^2+e^2>b^2-b^2+e^2>0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\ln b)$ 和 $(\ln b,b)$ 上各有一个零点 x_1,x_2

$$\therefore \begin{cases} f(x_1)=0 \\ f(x_2)=0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} e^{x_1}-bx_1+e^2=0 \\ e^{x_2}-bx_2+e^2=0 \end{cases}$$

要证 $x_2>\dfrac{b\ln b}{2e^2}x_1+\dfrac{e^2}{b}\Leftrightarrow x_2-\dfrac{e^2}{b}>\dfrac{\ln b}{2e^2}\cdot bx_1=\dfrac{\ln b}{2e^2}(e^{x_1}+e^2)$

由 $f(x)=2e^2-2b<0$，$\therefore 0<x_1<2$　$\therefore \frac{\ln b}{2e^2}\left(e^{x_1}+e^2\right)<\frac{\ln b}{2e^2}\left(e^2+e^2\right)=\ln b$

故只需证：$\ln b<x_2-\frac{e^2}{b}$，即证：$x_2>\frac{e^2}{b}+\ln b$

$\because \frac{e^2}{b}+\ln b>\ln b \Leftrightarrow$ 证：$f\left(\frac{e^2}{b}+\ln b\right)<0$

$$f\left(\frac{e^2}{b}+\ln b\right)=e^{\frac{e^2}{b}+\ln b}-b\ln b=be^{\frac{e^2}{b}}-b\ln b=b(e^{\frac{e^2}{b}}-\ln b)$$

而 $e^{\frac{e^2}{b}}-\ln b<e^{\frac{1}{e^2}}-4<e-4<0$　$\therefore f\left(\frac{e^2}{b}+\ln b\right)<0$ 证毕！