百校联盟2019届TOP20四月联考(全国Ⅱ卷)

理科数学　　参考答案

本试卷防伪处为：

与流动人口数量条形统计图

(22)(本小题满分10分)

1. D 【解析】$z=\frac{1+i}{1+2i}+i^2=\frac{(1+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}-i=\frac{3-i}{5}-i=\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i$，所以 z 的虚部为 $-\frac{6}{5}$.

2. C 【解析】当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\log_2 x=\log_2\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{2}$，满足 $\log_2 x<\frac{x}{2}$，当 $x=\sqrt{2}$ 时，$\log_2 x=\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$，满足 $\log_2 x<\frac{x}{2}$，当 $x=2\sqrt{2}$ 时，$\log_2 x=\log_2 2\sqrt{2}=\frac{3}{2}$，不满足 $\log_2 x<\frac{x}{2}$.

3. D 【解析】2010年我国流动人口数量约为2.2亿，人户分离人口数量约为2.6亿，比值高于50%；2014年我国流动人口数量与人户分离人口数量达到最大，所以A、B、C错误，D正确，故选D.

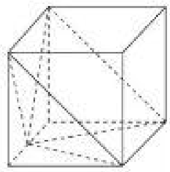
4. C 【解析】由题意可得 $\frac{b}{a}=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{b}{a}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$，所以 $e=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 2.

5. B 【解析】执行程序框图：$k=10$，$S=-1+10^2$；$k=9$，$S=1-10^2+9^2$；$k=8$，$S=-1+10^2-9^2+8^2$；$k=7$，依次类推，可得最后输出的结果为 $S=-1+10^2-9^2+8^2-7^2+\cdots+4^2-3^2+2^2=-1+(10+9+\cdots+4+3)+4=55$.

6. A 【解析】由 $\sin\alpha=2\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=2\cos\alpha$，得 $\tan\alpha=2$，由 $\sin(2\alpha+\beta)=3\sin\beta$，得 $\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=3\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$，整理得 $\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$，所以 $\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha=4$.

7. B 【解析】由数列 $\{a_na_{n+1}\}$ 的前 n 项和最小时 $n=2$，可得 $a_1a_2>0$，$a_2a_3<0$，$a_3a_4>0$，因为 $a_1=-3<0$，所以 $a_2=-3+d<0$，$a_3=-3+2d>0$，解得 $\frac{3}{2}<d<3$.

8. C 【解析】由三视图可知，该几何体为如图所示的四棱锥，其体积 $V=\frac{1}{3}\times4\times4\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=\frac{64}{3}$.



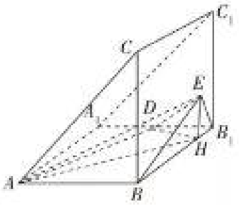
9. A 【解析】由 $C_n^2+C_n^3=A_{n+1}^2$，得 $\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=(n+1)n$，整理得 $n^2-6n-7=0$，所以 $n=7$，$(x^2-\frac{2}{\sqrt{x}})^7$ 的展开式中通项为 $T_{r+1}=C_7^r\cdot(-2)^r\cdot x^{14-\frac{5}{2}r}$，取 $r=4$，得展开式中 x^4 项的系数为 $C_7^4\cdot(-2)^4=560$.

10. A 【解析】因为点 $P(4,4)$ 在抛物线 C 上，所以 $p=2$，抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$，所以抛物线 C 在点 $P(4,4)$ 处的切线方程为 $y-4=2(x-4)$，即 $y=2x-4$，所以 $Q(2,0)$，$R(0,-4)$，故 Q 是线段 PR 中点，又∵ $PF\parallel QE$，所以 E 是 RF 中点，$F(0,1)$，$|RF|=5$，$|EQ|=\frac{5}{2}$，所以 $\frac{|RF|}{|EQ|}=2$.

11. B 【解析】设直线 l 的方程为 $y=kx$，则问题转化为方程 $f(x)=kx$ 有3个不同的实根，显然0是该方程的一个根，故问题可转化为直线 $y=k$ 与 $g(x)=\begin{cases}xe^x,x<0\\x^2-2x,x>0\end{cases}$ 的图象有2个不同的交点，当 $x<0$ 时，$g'(x)=(x+1)e^x$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,0)$ 上单调递增，且 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g(x)\in(-\frac{1}{e},0)$；当 $x>0$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且 $g(1)=-1$ 时，所以当 $k\in(-1,-\frac{1}{e})$ 时，直线 $y=k$ 与 $g(x)=\begin{cases}xe^x,x<0\\x^2-2x,x>0\end{cases}$ 的图象有2个

不同的交点. 则当 $k\in(-1,-\frac{1}{e})$ 时，直线 l 与 $f(x)$ 的图象有 3 个交点.

12. D 【解析】如图所示，作 $EH\perp BB_1$ 于 H，设 $BH=x(0\leqslant x\leqslant 4)$，$EH=y$，由 $\angle AEB=\angle DEB_1$ 可得 $\frac{BE}{AB}=\frac{B_1E}{DB_1}$，所以 $BE=2B_1E$，即 $\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(4-x)^2+y^2}$，整理得 $y^2=-x^2+\frac{32}{3}x-\frac{64}{3}$，所以 $AE^2=AB^2+BH^2+HE^2=16+x^2+y^2=\frac{32}{3}x-\frac{16}{3}$，所以当 $x=4$ 时，AE 长度最大为 $\frac{4\sqrt{21}}{3}$.



13. $\frac{1}{4}$ 【解析】由 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$ 得 $\boldsymbol{a}^2=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2}{2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{4}$.

14. $\frac{511}{5}$ 【解析】设插入的 8 个数的首项为 a，公比为 q，则 $0+aq=2a$，$\frac{256}{5}=aq^8$，所以 $q=2$，$a=\frac{1}{5}$，所以这 10 个数的和为 $\frac{\frac{1}{5}\times(1-2^9)}{1-2}=\frac{511}{5}$.

15. $(0,4]$ 【解析】由题意 $f(x)=2\sin\omega x\sin(\omega x+\frac{2\pi}{3})=\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}$，由于 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{24})$ 上单调递增，故 $\begin{cases}\frac{\pi}{6}\geqslant-\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ \frac{\pi}{12}\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$ $(k\in\mathbf{Z})$，解得 $0<\omega\leqslant 4$.

16. $(1,\frac{3}{2}]$ 【解析】由 $[x]\leqslant x$ 得 $x^2-x-2\leqslant 0$，即 $-1\leqslant x\leqslant 2$，由 $[x]\in\mathbf{Z}$ 可得 $x^2\in\mathbf{Z}$，因此 x 的可能取值为 $-1,0,1,\sqrt{2},\sqrt{3},2$，经检验得 $A=\{-1,\sqrt{3},2\}$，又 $y=\begin{cases}a(2^x+1),x<0\\-x^2-\frac{2a}{3},x\geqslant 0\end{cases}$ 的值域为 $(a,2a)\cup(-\infty,-\frac{2a}{3}]$，所以 $\begin{cases}a<\sqrt{3},\\2a>2,\\-\frac{2a}{3}\geqslant-1,\end{cases}$ 即 $1<a\leqslant\frac{3}{2}$.

17.【解析】(Ⅰ)由 $\frac{AC+BC}{AC}=2\cos^2\frac{C}{2}$，

得 $\frac{BC}{AC}=2\cos^2\frac{C}{2}-1=\cos C$，

由正弦定理得 $\frac{\sin A}{\sin B}=\cos C$，$\sin A=\sin B\cos C$，

所以 $\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin B\cos C$，

即 $\cos B\sin C=0$，因为 $0<C<\pi$，$\sin C\neq 0$，

所以 $\cos B=0$，$B=\frac{\pi}{2}$. ………………………… 5 分

(Ⅱ)设 $\angle ACP=\angle BCP=\alpha$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCP$ 中，$BP=CP\sin\alpha=\sin\alpha$，

$BC=CP\cos\alpha=\cos\alpha$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB=AC\sin2\alpha=6\sin2\alpha$，

由勾股定理得 $AB^2+BC^2=AC^2$，

即 $36\sin^2 2\alpha+\cos^2\alpha=36$，

即 $36\cos^2 2\alpha=\cos^2\alpha$，所以 $6\cos2\alpha=\cos\alpha$，

即 $12\cos^2\alpha-\cos\alpha-6=0$，解得 $\cos\alpha=\frac{3}{4}$，

在 $\triangle ACP$ 中，由余弦定理得 $AP^2=AC^2+CP^2-2AC\cdot CP\cos\alpha=36+1-12\times\frac{3}{4}=28$，

所以 $AP=2\sqrt{7}$. ………………………… 12 分

18.【解析】(Ⅰ)设中位数为 x，由直方图知：$10\times0.015+10\times0.015+(x-35)\times0.025=0.5$，解得 $x=43$(百元). ………………………… 2 分

(Ⅱ)由题意可得月薪情况与在城市 A，B 工作人数与频率统计表

月薪（百元）	被调查人数	在城市 A 工作人数与频率	在城市 B 工作人数与频率
[15,25)	18	15,0.25	3,0.05
[25,35)	18	12,0.20	6,0.10
[35,45)	30	12,0.20	18,0.30
[45,55)	24	12,0.20	12,0.20
[55,65)	18	6,0.10	12,0.20
[65,75]	12	3,0.05	9,0.15

所以在城市 A 工作的被调查者的月薪的平均数为 $20\times0.25+30\times0.20+40\times0.20+50\times0.20+60\times0.10+70\times0.05=38$（百元）.

在城市 B 工作的被调查者的月薪的平均数为 20

$\times 0.05+30\times 0.10+40\times 0.30+50\times 0.20+60\times 0.20+70\times 0.15=48.5$(百元). ………… 7 分

(Ⅲ)月薪(单位:百元)在$[65,75]$的人数为 12 人,其中来自城市 A 的有 3 人,来自城市 B 的有 9 人,所以 X 的取值依次为 1,2,3,4,

$P(X=1)=\frac{C_3^3C_9^1}{C_{12}^4}=\frac{1}{55}$,$P(X=2)=\frac{C_3^2C_9^2}{C_{12}^4}=\frac{12}{55}$,

$P(X=3)=\frac{C_3^1C_9^3}{C_{12}^4}=\frac{28}{55}$,$P(X=4)=\frac{C_9^4}{C_{12}^4}=\frac{14}{55}$, ……………………………………………… 10 分

所以 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{14}{55}$

$E(X)=1\times\frac{1}{55}+2\times\frac{12}{55}+3\times\frac{28}{55}+4\times\frac{14}{55}=3$. ……………………………………………… 12 分

9.【解析】(Ⅰ)由椭圆 C 的离心率为$\frac{2}{3}$,得$\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\frac{2}{3}$,整理得$\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{9}$, ………………………… 2 分

由过椭圆 C 左顶点斜率为$\frac{\sqrt{6}}{12}$的直线与圆 D 相切,

得$\frac{1}{\sqrt{(a+2)^2-1^2}}=\frac{\sqrt{6}}{12}$,

解得 $a=3$,所以 $b^2=5$,

故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. ………… 4 分

(Ⅱ)设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

直线 MN 的方程为 $x=my+2$,

由$\begin{cases}x=my+2,\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1,\end{cases}$可得$(5m^2+9)y^2+20my-25=0$,

则 $y_1+y_2=\frac{-20m}{5m^2+9}$,$y_1y_2=\frac{-25}{5m^2+9}$,

所以$|MN|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|$

$=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{30(1+m^2)}{5m^2+9}$,…………………………………………… 7 分

点 P 到直线 MN 的距离等于原点 O 到直线 MN 的距离$\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$,…………………………… 8 分

故$\triangle PMN$的面积为$S=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}\times\frac{30(1+m^2)}{5m^2+9}=\frac{30\sqrt{1+m^2}}{5m^2+9}=\frac{5}{2}$,

解得 $m^2=3$,…………………………………… 11 分

则 $m=\pm\sqrt{3}$,

所以直线 MN 的方程为 $x\pm\sqrt{3}y-2=0$. ……………………………………………… 12 分

20.【解析】(Ⅰ)由图甲知,在图乙中$\triangle BDE$是正三角形,

取 BD 中点 G,连接 GE,GF,如图,则 $GE\perp BD$,

因为 $EF\perp BD$,$EG\cap EF=E$,

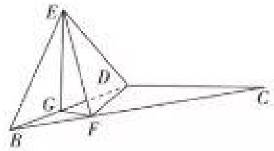
所以 $BD\perp$平面 EFG,

因为 $GF\subset$平面 EFG,所以 $GF\perp BD$.

由已知可得 $BG=2$,$\angle GBF=30^\circ$,

所以 $BF=\frac{BG}{\cos 30^\circ}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,

又 $BC=4\sqrt{3}$,所以$\frac{BF}{BC}=\frac{1}{3}$. ………………… 5 分



(Ⅱ)由 $GE\perp BD$,平面 $DBE\perp$平面 BCD,

可得 $EG\perp$平面 BCD,

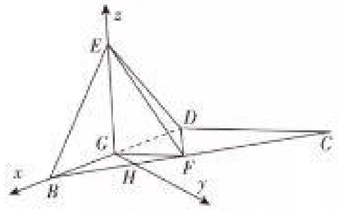
由直线 EF 与平面 BCD 所成角为 60°,

得$\angle EFG=60^\circ$,所以 $GF=2$,点 F 为 BC 中点,

取 BC 上一点 H,使得 $BH=\frac{1}{3}BC$,

由(Ⅰ)知 $GH\perp BD$,

以 G 为坐标原点,GB 所在直线为 x 轴,GH 所在直线为 y 轴,GE 所在的直线为 z 轴,建立空间直角坐标系,如图所示.



则 $G(0,0,0)$,$E(0,0,2\sqrt{3})$,$B(2,0,0)$,$D(-2,0,0)$,$H(0,\frac{2\sqrt{3}}{3},0)$, ………………… 7 分

$\overrightarrow{ED}=(-2,0,-2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{EB}=(2,0,-2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{BH}=(-2,\frac{2\sqrt{3}}{3},0)$,

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{EB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BH}=(-1,\sqrt{3},-2\sqrt{3})$,

……………………………………… 8 分

设平面 DEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ED}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2x-2\sqrt{3}z=0,\\ -x+\sqrt{3}y-2\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

取$z=1$,得$\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},1,1)$,

又平面BDE的一个法向量为$\overrightarrow{GH}=(0,\frac{2\sqrt{3}}{3},0)$,

…………………………………………… 10分

设平面DEF与平面BDE所成锐二面角为θ,

则$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{GH}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{GH}|}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. …… 12分

21.【解析】(Ⅰ)由$f(x)=(x-1)e^x+\ln x$得$f'(x)=xe^x+\frac{1}{x}$,所以$f(1)=0,f'(1)=e+1$,

所以$y=f(x)$的图象在$x=1$处的切线方程为$y=(e+1)(x-1)$,

即$(e+1)x-y-e-1=0$. ……………………… 4分

(Ⅱ)当$x\in(0,2)$时,$g(x)>f(x)$恒成立,

即$a>(x-2)e^x+\ln x-x$在$(0,2)$上恒成立,…

…………………………………………… 5分

设$h(x)=(x-2)e^x+\ln x-x(x>0)$,

则$h'(x)=(x-1)e^x+\frac{1}{x}-1=(x-1)(e^x-\frac{1}{x})(x>0)$, ……………………………… 6分

设$F(x)=e^x-\frac{1}{x}$,则$F(x)$在$(0,2)$上是增函数,

且$F(\frac{1}{2})=\sqrt{e}-2<0,F(1)=e-1>0$,

所以存在$x_0\in(\frac{1}{2},1)$,使得$F(x_0)=0$,

即$e^{x_0}=\frac{1}{x_0},\ln x_0=-x_0$,

所以当$x\in(0,x_0)$时,$h'(x)>0$,$h(x)$是增函数,当$x\in(x_0,1)$时,$h'(x)<0$,$h(x)$是减函数,当$x\in(1,2)$时,$h'(x)>0$,$h(x)$是增函数.

又$h(x_0)=(x_0-2)e^{x_0}+\ln x_0-x_0=1-\frac{2}{x_0}-2x_0$,

…………………………………………… 9分

根据$G(x)=1-\frac{2}{x}-2x$在$(0,1)$上是增函数,

可得$h(x_0)<G(1)=-3$.

又$h(2)=\ln2-2>-3$,

所以$h(x)<\ln2-2$.

故实数a的取值范围为$a\geqslant\ln2-2$. ……… 12分

22.【解析】(Ⅰ)由$\begin{cases}x=2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$消去$t$得直线$l$的普通方程为$x+y-3\sqrt{2}=0$, ………………… 2分

把$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$,代入$x+y-3\sqrt{2}=0$,

得直线l的极坐标方程为$\rho(\cos\theta+\sin\theta)=3\sqrt{2}$.

…………………………………………… 5分

(Ⅱ)设M,N的极坐标分别为$(\rho_1,\theta_1),(\rho_2,\theta_1)$,

则$\rho_1=\frac{3\sqrt{2}}{\cos\theta_1+\sin\theta_1},\rho_2=3\sin\theta_1$, …………… 6分

所以$\frac{|ON|}{|OM|}=\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta_1(\cos\theta_1+\sin\theta_1)$

$=\frac{\sqrt{2}}{4}\sin2\theta_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1-\cos2\theta_1}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin(2\theta_1-\frac{\pi}{4})+\frac{\sqrt{2}}{4}$,

因为$0<\theta_1<\frac{\pi}{2}$,

所以$-\frac{\pi}{4}<2\theta_1-\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$,

则$2\theta_1-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,即$\theta_1=\frac{3\pi}{8}$时,

$\frac{|ON|}{|OM|}$的最大值为$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$. ……………… 10分

23.【解析】(Ⅰ)$f(x)=|x-2|-2|x-3|=\begin{cases}x-4,x<2,\\ 3x-8,2\leqslant x\leqslant3,\\ 4-x,x>3,\end{cases}$ ……………………… 2分

当$x<2$时,由$f(x)<-1$得$x-4<-1$,

解得$x<2$;

当$2\leqslant x\leqslant3$时,由$f(x)<-1$得$3x-8<-1$,

解得$2\leqslant x<\frac{7}{3}$;

当$x>3$时,由$f(x)<-1$得$4-x<-1$,

解得$x>5$.

所以$f(x)<-1$的解集为$\{x|x<\frac{7}{3}$或$x>5\}$.

…………………………………………… 5分

(Ⅱ)由$f(x)=\begin{cases}x-4,x<2\\ 3x-8,2\leqslant x\leqslant3\\ 4-x,x>3\end{cases}$可知,

$f(x)$在$(-\infty,3]$上是增函数,在$[3,+\infty)$上是减函数,所以$f(x)\leqslant f(3)=1$, ……………… 7分

$\log_4(2^a+2^b)\geqslant\log_4 2\sqrt{2^{a+b}}=\log_4 4=1$,

所以$f(x)\leqslant\log_4(2^a+2^b)$. ………………… 10分

百校联盟2019届TOP20四月联考(全国Ⅱ卷)

文科数学　　参考答案

本试卷防伪处为：

我国流动人口数量与人户分离人口

请考生从第22、23题中任选一题作答

1.C 【解析】$A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x|\log_2 x\leqslant\frac{1}{2}\}=\{x|0<x\leqslant\sqrt{2}\}$，所以 $A\cap B=\{1\}$.

2.A 【解析】$z=\frac{1+i}{1+2i}=\frac{(1+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{3-i}{5}$，所以 z 的虚部为 $-\frac{1}{5}$.

3.D 【解析】2010年我国流动人口数量约为2.2亿，人户分离人口数量约为2.6亿，比值高于50%；2014年我国流动人口数量与人户分离人口数量达到最大，所以A，B，C错误，D正确，故选D.

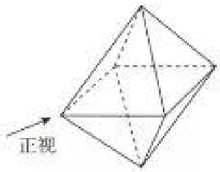
4.D 【解析】因为渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 被圆 $x^2+y^2-4x=0$ 截得的线段长为 $\frac{16}{5}$，则圆心$(2,0)$到渐近线的距离 $d=\frac{\frac{b}{a}\times 2}{\sqrt{(\frac{b}{a})^2+1}}=\frac{2b}{c}=\frac{6}{5}$，所以 $3c=5b$，$9c^2=25(c^2-a^2)$，整理得 $e^2=\frac{25}{16}$，$e=\frac{5}{4}$.

5.A 【解析】执行程序框图：$S=10$，$k=9$；$S=10\times 9$，$k=8$；$S=10\times 9\times 8$，$k=7$；$S=10\times 9\times 8\times 7$，$k=6$；$S=10\times 9\times 8\times 7\times 6$，$k=5$；$S=10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5$，$k=4$，结束循环，故输出的是 $10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5$ 的值.

6.C 【解析】由正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体对角线 A_1C 是球 O 的直径，所以球 O 的半径 $R=3$，球心 O 到平面 AB_1D_1 的距离 $d=\frac{1}{6}A_1C=1$，所以截面圆的半径 $r=\sqrt{R^2-d^2}=2\sqrt{2}$，所以截面圆的面积为 8π.

7.B 【解析】设$\{a_n\}$的公差为 d，由 $S_2=-1$，$S_3=2$，得 $\begin{cases}2a_1+a_2=-1,\\3a_1+2a_2+a_3=2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}3a_1+d=-1,\\6a_1+4d=2,\end{cases}$ 解得 $a_1=-1$，$d=2$，所以 $a_4=5$.

8.B 【解析】由三视图可知，该几何体为如图所示的八面体，可看作两个四棱锥，每个四棱锥的底面是边长为2的正方形，高为$\sqrt{2}$，所以该八面体的体积为 $V=2\times\frac{1}{3}\times 2^2\times\sqrt{2}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$.



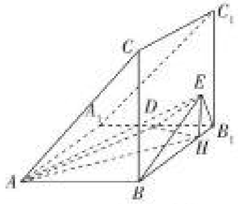
9.C 【解析】由 $f(x)=xe^x-a(e^x-1)$ 得 $f'(x)=(x-a+1)e^x$，所以 $f(x)$ 在$[a-1,a]$上是增函数，由 $e^x\geqslant x+1$ 得 $f(a-1)=a-e^{a-1}\leqslant 0$，所以当 $f(a)=a\geqslant 0$ 时，$f(x)$在区间$[a-1,a]$上有零点.

10.D 【解析】点 Q 在抛物线 C 的准线上，设点 P 在准线上的射影为 R，则 $\frac{|PF|}{|PQ|}=\frac{|PR|}{|PQ|}=\sin\angle PQR$，所以当直线 PQ 与抛物线 C 切于第一象限时，$\sin\angle PQR$ 最小，此时设 $P(t,\frac{t^2}{4})(t>0)$，则切线 PQ 的斜率 $k=\frac{t}{2}=\frac{\frac{t^2}{4}+1}{t+\frac{3}{2}}$，所以 $t=1$，$P(1,\frac{1}{4})$，$|PR|=\frac{5}{4}$，$|PQ|=\frac{5\sqrt{5}}{4}$，$\frac{|PR|}{|PQ|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

11.B 【解析】设直线 l 的方程为 $y=kx$，则问题转化为方程 $f(x)=kx$ 有3个不同的实根，显然0是该方程的一个根，故问题可转化为直线 $y=k$ 与 $g(x)=\begin{cases}xe^x,x<0\\x^2-2x,x>0\end{cases}$ 的图象有2个不同的交点，当 $x<0$ 时，$g'(x)=(x+1)e^x$，所以 $g(x)$ 在$(-\infty,-1)$上单调递减，在$(-1,0)$上单调递增，且 $x\in(-\infty,0)$时，$g(x)\in(-\frac{1}{e},0)$；当 $x>0$ 时，$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，且 $g(1)=-1$ 时，所以当 $k\in(-1,-\frac{1}{e})$时，直线 $y=k$ 与 $g(x)=\begin{cases}xe^x,x<0\\x^2-2x,x>0\end{cases}$ 的图象有2个不同的交点，则当 $k\in(-1,-\frac{1}{e})$时，直线 l 与

$f(x)$的图象有 3 个交点.

12. D 【解析】如图所示，作 $EH \perp BB_1$ 于 H，设 $BH=x(0\leqslant x\leqslant 4)$，$EH=y$，由 $\angle AEB=\angle DEB_1$ 可得 $\frac{BE}{AB}=\frac{B_1E}{DB_1}$，所以 $BE=2B_1E$，即 $\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(4-x)^2+y^2}$，整理得 $y^2=-x^2+\frac{32}{3}x-\frac{64}{3}$，所以 $AE^2=AB^2+BH^2+HE^2=16+x^2+y^2=\frac{32}{3}x-\frac{16}{3}$，所以当 $x=4$ 时，AE 长度最大为$\frac{4\sqrt{21}}{3}$.



13. $2\sqrt{3}$ 【解析】由 $\boldsymbol{a}=(2,2\sqrt{3})$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 夹角为 $120°$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2$，所以 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{16+4\times(-2)+4}=2\sqrt{3}$.

14. $\frac{255\sqrt{2}}{2}$ 【解析】由 $a_na_{n+1}=2^n$ 得 $a_2a_3=4$，结合 $a_2=2a_3$ 得 $a_3=\sqrt{2}$，再由 $a_na_{n+1}=2^n$ 得 $a_{n+1}a_{n+2}=2^{n+1}$，相除得$\frac{a_{n+2}}{a_n}=2$，所以数列$\{a_{2n-1}\}$构成首项为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，公比为 2 的等比数列，所以 $a_1+a_3+\cdots+a_{15}$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\times(1-2^8)}{1-2}=\frac{255\sqrt{2}}{2}.$$

15. $(0,\frac{\pi}{6}]$ 【解析】观察图象可知 $A=2$ 且点$(0,1)$在 $g(x)$的图象上，所以 $1=2\sin(\omega\cdot 0+\varphi)$，即 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$，由$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，又$\frac{11}{12}\pi$ 是函数的一个零点且是图象递增穿过 x 轴形成的零点，所以 $\frac{11\pi}{12}\omega+\frac{\pi}{6}=2\pi$，$\omega=2$. 故 $g(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，$f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，$f(x)$的含有 0 的递增区间为$[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$，所以 $0<t\leqslant\frac{\pi}{6}$.

16. ②③④ 【解析】$D(x)$值域是$\{0,1\}$，$1\notin\{y|y=R(x)\}$，①错误；当 x 为有理数时，$-x$ 也是有理数，此时 $D(x)=D(-x)=1$，当 x 为无理数时，$-x$也是无理数，此时 $D(x)=D(-x)=0$，所以 $D(x)$是偶函数，②正确；当 x 为有理数时，$x+1$ 也是有理数，此时 $D(x+1)=D(x)=1$，当 x 为无理数时，$x+1$ 也是无理数，此时 $D(x+1)=D(x)=0$，所以 $D(x)$是周期函数，③正确；当 $x=0$ 或 1 时，$R(x)=0$，$R(1-x)=0$，当 x 为既约真分数 $\frac{p}{q}$ 时，$R(x)=R(1-x)=\frac{1}{q}$，当 x 为无理数时，$R(1-x)=R(x)=0$，所以 $R(1-x)=R(x)$，④正确.

17.【解析】(Ⅰ)由已知得$\sqrt{2}a+c=\sqrt{2}b\sin(A+\frac{\pi}{4})=b(\sin A+\cos A)$，

由正弦定理得，$\sqrt{2}\sin A+\sin C=\sin B(\sin A+\cos A)$，

所以$\sqrt{2}\sin A=\sin B\sin A+\sin B\cos A-\sin(A+B)=\sin B\sin A-\cos B\sin A$，

因为 $A\in(0,\pi)$，$\sin A\neq 0$，

所以$\sqrt{2}=\sin B-\cos B=\sqrt{2}\sin(B-\frac{\pi}{4})$，

所以 $\sin(B-\frac{\pi}{4})=1$，

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B-\frac{\pi}{4}\in(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$，

所以 $B-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，故 $B=\frac{3\pi}{4}$. …………… 6 分

(Ⅱ)由 $B=\frac{3\pi}{4}$及余弦定理得 $b^2=a^2+c^2+\sqrt{2}ac=(a+c)^2-(2-\sqrt{2})ac$，

即 $5=3+2\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})ac$，所以 $ac=\sqrt{2}$，

所以$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$. …………………………………… 12 分

18.【解析】(Ⅰ)设中位数为 x，由直方图知：$10\times 0.015+10\times 0.015+(x-35)\times 0.025=0.5$，

解得 $x=43$(百元). ………………………… 2 分

(Ⅱ)由题意可得月薪情况与在城市 A，B 工作人数与频率统计表：

月薪(百元)	被调查人数	在城市 A 工作人数与频率	在城市 B 工作人数与频率
[15,25)	18	15,0.25	3,0.05
[25,35)	18	12,0.20	6,0.10
[35,45)	30	12,0.20	18,0.30
[45,55)	24	12,0.20	12,0.20
[55,65)	18	6,0.10	12,0.20
[65,75]	12	3,0.05	[illegible]

所以在城市 A 工作的被调查者的月薪平均数为 $20\times0.25+30\times0.20+40\times0.20+50\times0.20+60\times0.10+70\times0.05=38.5$，

在城市 B 工作的被调查者的月薪平均数为 $20\times0.05+30\times0.10+40\times0.30+50\times0.20+60\times0.20+70\times0.15=48.5$. …………………… 7 分

(Ⅱ)月薪(单位:百元)在 $[55,65)$ 的人数为 18 人，其中来自城市 A 的有 6 人，来自城市 B 的有 12 人，按照来自城市 A 或 B 分层抽样抽取 6 人，则城市 A 抽取 2 人，记作 a,b，城市 B 抽取 4 人，记作 c,d,e,f，

从这 6 人中随机抽取 2 人，结果有 $(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(b,c),(b,d),(b,e),(b,f),(c,d),(c,e),(c,f),(d,e),(d,f),(e,f)$，共 15 种，

其中恰有 1 人来自城市 B 的结果有 $(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(b,c),(b,d),(b,e),(b,f)$，共 8 种，

所以抽取的 2 人恰有 1 人来自城市 B 的概率 $P=\frac{8}{15}$. …………………………………………… 12 分

19.【解析】(Ⅰ)证明:连接 BE，

因为四边形 $ABFE$ 为正方形，

所以 $AF\perp BE$，

因为 AD 与正方形 $ABFE$ 所在平面垂直，$BC\parallel AD$，

所以 $BC\perp$ 平面 $ABFE$，

因为 $AF\subset$ 平面 $ABFE$，所以 $BC\perp AF$，

又 $BC\cap BE=B$，所以 $AF\perp$ 平面 CBE，

因为 $CE\subset$ 平面 CBE，

所以 $AF\perp CE$. ………………………………… 6 分

(Ⅱ)三棱柱 $ADE-BCF$ 的底面 ADE 的面积为 $\frac{1}{2}\times AD\times AE=\frac{1}{2}\times2\times2=2$.

三棱柱 $ADE-BCF$ 的高 $AB=2$，

所以三棱柱 $ADE-BCF$ 的体积 $V_1=2\times2=4$，

正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 的面积为 $2\times2=4$，

正四棱锥 $P-ABCD$ 的高 $h=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$，

所以正四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V_2=\frac{1}{3}\times4\times\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，

所以该几何体的体积 $V=V_1+V_2=4+\frac{4\sqrt{2}}{3}$. ………………………………………… 12 分

20.【解析】(Ⅰ)由椭圆 C 的离心率为 $\frac{2}{3}$，得 $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\frac{2}{3}$，整理得 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{9}$， ……………………………… 2 分

由过椭圆 C 左顶点斜率为 $\frac{\sqrt{6}}{12}$ 的直线与圆 D 相切，

得 $\frac{1}{\sqrt{(a+2)^2-1^2}}=\frac{\sqrt{6}}{12}$，

解得 $a=3$，所以 $b^2=5$，

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. …………… 4 分

(Ⅱ)设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

直线 MN 的方程为 $x=my+2$，

由 $\begin{cases}x=my-2\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1\end{cases}$ 可得 $(5m^2+9)y^2+20my-25=0$，

则 $y_1+y_2=\frac{-20m}{5m^2+9}$，$y_1y_2=\frac{-25}{5m^2+9}$，

所以 $|MN|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|$

$=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{30(1+m^2)}{5m^2+9}$，………………………………………………… 7 分

点 P 到直线 MN 的距离等于原点 O 到直线 MN 的距离 $\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$，……………………………… 8 分

故 $\triangle PMN$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}\times\frac{30(1+m^2)}{5m^2+9}=\frac{30\sqrt{1+m^2}}{5m^2+9}=\frac{5}{2}$，

解得 $m^2=3$，……………………………………… 11 分

则 $m=\pm\sqrt{3}$，

所以直线 MN 的方程为 $x\pm\sqrt{3}y-2=0$. ……… ……………………………………………… 12 分

21.【解析】(Ⅰ)由 $f(x)=(x-1)e^x+\ln x$ 得 $f'(x)=xe^x+\frac{1}{x}$，所以 $f(1)=0$，$f'(1)=e+1$，

所以 $y=f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=(e+1)(x-1)$，

即 $(e+1)x-y-e-1=0$. …………………… 4 分

(Ⅱ)当 $x\in(0,2)$ 时，$g(x)>f(x)$ 恒成立，

即 $a>(x-2)e^x+\ln x-x$ 在 $(0,2)$ 上恒成立，

……………………………………………… 5 分

设 $h(x)=(x-2)e^x+\ln x-x(x>0)$，

则 $h'(x)=(x-1)e^x+\dfrac{1}{x}-1=(x-1)(e^x-\dfrac{1}{x})(x>0)$， …………………………………… 6 分

设 $F(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$，则 $F(x)$ 在 $(0,2)$ 上是增函数，

且 $F(\dfrac{1}{2})=\sqrt{e}-2<0$，$F(1)=e-1>0$，

所以存在 $x_0\in(\dfrac{1}{2},1)$，使得 $F(x_0)=0$，

即 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，$\ln x_0=-x_0$，

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 是增函数，当 $x\in(x_0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 是减函数，当 $x\in(1,2)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 是增函数.

又 $h(x_0)=(x_0-2)e^{x_0}+\ln x_0-x_0=1-\dfrac{2}{x_0}-2x_0$，

…………………………………… 9 分

根据 $G(x)=1-\dfrac{2}{x}-2x$ 在 $(0,1)$ 上是增函数，

可得 $h(x_0)<G(1)=-3$，

又 $h(2)=\ln 2-2>-3$，

所以 $h(x)<\ln 2-2$，

故实数 a 的取值范围为 $a\geqslant\ln 2-2$. ……… 12 分

22.【解析】(Ⅰ)由 $\begin{cases}x=2\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ 消去 t 得直线 l 的普通方程为 $x+y-3\sqrt{2}=0$， …………………… 2 分

把 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，代入 $x+y-3\sqrt{2}=0$ 得直线 l 的极坐标方程为 $\rho(\cos\theta+\sin\theta)=3\sqrt{2}$. ……

…………………………………… 5 分

(Ⅱ)设 M，N 的极坐标分别为 (ρ_1,θ_1)，(ρ_2,θ_1)，

则 $\rho_1=\dfrac{3\sqrt{2}}{\cos\theta_1+\sin\theta_1}$，$\rho_2=3\sin\theta_1$， …………… 6 分

所以 $\dfrac{|ON|}{|OM|}=\dfrac{\rho_2}{\rho_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta_1(\cos\theta_1+\sin\theta_1)$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\sin 2\theta_1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1-\cos 2\theta_1}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\sin(2\theta_1-\dfrac{\pi}{4})+\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

因为 $0<\theta_1<\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $-\dfrac{\pi}{4}<2\theta_1-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}$，

则 $2\theta_1-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\theta_1=\dfrac{3\pi}{8}$ 时，

$\dfrac{|ON|}{|OM|}$ 的最大值为 $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$. ………………… 10 分

23.【解析】(Ⅰ) $f(x)=|x-2|-2|x-3|=\begin{cases}x-4, x<2,\\ 3x-8, 2\leqslant x\leqslant 3,\\ 4-x, x>3,\end{cases}$ …………………………… 2 分

当 $x<2$ 时，由 $f(x)<-1$ 得 $x-4<-1$，

解得 $x<2$；

当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，由 $f(x)<-1$ 得 $3x-8<-1$，

解得 $2\leqslant x<\dfrac{7}{3}$；

当 $x>3$ 时，由 $f(x)<-1$ 得 $4-x<-1$，

解得 $x>5$.

所以 $f(x)<-1$ 的解集为 $\{x|x<\dfrac{7}{3}$ 或 $x>5\}$.

…………………………………… 5 分

(Ⅱ)由 $f(x)=\begin{cases}x-4, x<2\\ 3x-8, 2\leqslant x\leqslant 3\\ 4-x, x>3\end{cases}$ 可知，

$f(x)$ 在 $(-\infty,3]$ 上是增函数，在 $[3,+\infty)$ 上是减函数，所以 $f(x)\leqslant f(3)=1$， ……………… 7 分

$\log_4(2^a+2^b)\geqslant\log_4 2\sqrt{2^{a+b}}=\log_4 4=1$，

所以 $f(x)\leqslant\log_4(2^a+2^b)$. ……