机密★启用前(全国卷理科数学)

华大新高考联盟 2023 届高三 4 月教学质量测评

理科数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】C

【命题立意】本题考查集合的运算、一元二次不等式的解法,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$A=\{x|(3x+4)(x-2)<0\}=\left\{x\middle|-\frac{4}{3}<x<2\right\}$,$B=\{x|7x-4>0\}=\left\{x\middle|x>\frac{4}{7}\right\}$,故

$A\cap B=\left\{x\middle|\frac{4}{7}<x<2\right\}$,故选 C.

2.【答案】D

【命题立意】本题考查复数的几何意义,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$3\sqrt{a^2+3}-5\geqslant3\sqrt{3}-5>0$,$4a-5-a^2=-(a^2-4a+5)=-(a-2)^2-1<0$,故在复平面内,复数 z 所对应的点位于第四象限,故选 D.

3.【答案】A

【命题立意】本题考查事件的概率,考查数学运算、逻辑推理、数学建模的核心素养.

【解析】依题意,所求概率 $P=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{11}{24}$,故选 A.

4.【答案】B

【命题立意】本题考查函数的图象与性质,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】由题图可知,函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称,故函数 $f(x)$ 为偶函数,排除 C;而 $\cos\left(4\cos\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(4\sin\frac{\pi}{2}\right)=1+\cos4>0$,排除 A;$\cos\left(4\cos\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3}{4}=\cos2\sqrt{2}+\frac{3}{4}<1$,排除 D;故选 B.

5.【答案】C

【命题立意】本题考查数学文化、等比数列的运算,考查数学运算、逻辑推理、数学建模的核心素养.

【解析】依题意,$a_2=84$,$b_1=14$.

因为 $a_{n+1}=6b_n$,$b_{n+1}=a_{n+1}+b_n$,所以 $b_{n+1}=7b_n$. 故数列 $\{b_n\}$ 是以 14 为首项,7 为公比的等比数列.

故 $b_n=14\cdot7^{n-1}=2\cdot7^n$,$a_{n+1}=6b_n=12\cdot7^n$,而 $a_1=12$,故 $a_n=12\cdot7^{n-1}$

故 $S_n=\frac{12\cdot(1-7^n)}{1-7}=2\cdot(7^n-1)$,$T_n=\frac{14\cdot(1-7^n)}{1-7}=\frac{7\cdot(7^n-1)}{3}$,故选 C.

6.【答案】C

【命题立意】本题考查平面向量的数量积及其应用,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$f(x)=\frac{5x-10-1}{x-2}=5-\frac{1}{x-2}$,故函数 $f(x)$ 图象的对称中心为 $(2,5)$,

故 $(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})\cdot\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=(4,10)\cdot(3,-4)=-28$,

而 $|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}|=2\sqrt{29}$,$|\overrightarrow{AB}|=5$,

故 $\cos\langle\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON},\overrightarrow{AB}\rangle=\frac{-28}{2\sqrt{29}\cdot5}=\frac{-14}{\sqrt{29}\cdot5}=-\frac{14\sqrt{29}}{145}$,故选 C.

7.【答案】D

【命题立意】本题考查空间几何体的表面积与体积,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意，$\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\frac{9\sqrt{3}}{4}$，解得 $AB=3$，同理可得 $A_1B_1=6$.

记$\triangle ABC$，$\triangle A_1B_1C_1$ 的外接圆圆心分别为 O,O'，则 $AO=\sqrt{3}$，$A_1O'=2\sqrt{3}$，

而 $AA_1=\sqrt{30}$，由平面几何知识可知 $OO'=3\sqrt{3}$.

记正三棱台 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的外接球球心为 O_1，则 $O_1A=O_1A_1=R$，

即 $\sqrt{AO^2+O_1O^2}=\sqrt{A_1O'^2+O'O_1^2}$.

设 $O'O_1=h$，故 $3+(3\sqrt{3}-h)^2=h^2+12$，解得 $h=\sqrt{3}$，则 $R=\sqrt{15}$，

故所求外接球的表面积 $S=4\pi R^2=60\pi$，故选 D.

8.【答案】B

【命题立意】本题考查导数的几何意义、直线垂直关系的判断，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意，$f(x)=x^3-x$，则 $f'(x)=3x^2-1$，设切点坐标为$(x_0,x_0^3-x_0)$，

则所求切线的方程为 $y-x_0^3+x_0=(3x_0^2-1)(x-x_0)$，

将$(1,0)$代入，可得$-x_0^3+x_0=(3x_0^2-1)(1-x_0)$，即 $2x_0^3-3x_0^2+1=0$，

故$(2x_0+1)(x_0-1)^2=0$，解得 $x_0=-\frac{1}{2}$或 $x_0=1$，

故直线 l 的斜率为$-\frac{1}{4}$或 2，

观察可知，仅有直线 $4x-y-2=0$ 与直线 l 垂直，故选 B.

9.【答案】D

【命题立意】本题考查双曲线的方程与性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】因为 $\overrightarrow{BF_1}=2\overrightarrow{BD}$，$F_2D\perp F_1B$，故$\triangle BF_1F_2$ 为等腰三角形，故 $|BF_2|=|F_1F_2|=2c$，而 $|F_2D|=\frac{1}{2}|F_1F_2|$，故 $B(2c,\sqrt{3}c)$；而 $\cos\theta=\frac{7\sqrt{31}}{62}$，故直线的斜率 $\tan\theta=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}=\frac{5\sqrt{3}}{7}$，即 $\frac{\sqrt{3}c}{2c-a}=\frac{5\sqrt{3}}{7}$，则 $\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{5}{3}$，解得 $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$，故双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{4}{3}x$，故选 D.

10.【答案】C

【命题立意】本题考查基本不等式、不等关系、函数的单调性，考查数学运算、数学抽象、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，有 $a^2+b^2+c^2=2ab+bc$.

因为 $a^2+b^2+c^2>2ab+c^2$，所以 $2ab+bc>2ab+c^2$，故 $b>c$.

又 $a^2+b^2+c^2=a^2+\frac{3}{4}b^2+\frac{1}{4}b^2+c^2>a^2+\frac{3}{4}b^2+bc$，

即 $2ab+bc>a^2+\frac{3}{4}b^2+bc$，故 $2ab>a^2+\frac{3}{4}b^2>\frac{1}{2}b^2+ab$，

故 $2a>b$，所以 $2a>b>c$.

故 $e^{2a}>e^b$，①正确.

因为 $b>c$，所以 $b^2+9>c^2+9$，

故 $\log_{\frac{1}{4}}(b^2+9)+\log_4(c^2+9)<0$，②正确.

因为 $2a>c$，所以 $4a^2+6>c^2+6$，

所以 $\frac{2}{4a^2+6}<\frac{2}{c^2+6}$，③错误.

故选 C.

11.【答案】D

【命题立意】本题考查三角函数的图象与性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意，$f(x)=\sin\frac{2x}{3}-\sqrt{3}\cos\frac{2x}{3}-\sqrt{3}=2\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}$，故 $T=\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$，故A错误；

因为 $f(0)+f(2\pi)=-3\sqrt{3}\neq 0$，故 $(\pi,0)$ 不是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心，故B错误；

将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后，得到 $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{4\pi}{9}\right)-\sqrt{3}$，显然该函数不是偶函数，故C错误；

函数 $f(x)$ 在 $[0,10\pi]$ 上有7个零点，分别为 $\pi,\frac{3\pi}{2},4\pi,\frac{9\pi}{2},7\pi,\frac{15\pi}{2},10\pi$，故D正确；故选D.

12.【答案】B

【命题立意】本题考查利用导数研究函数的性质，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，有 $xe^x-m(\ln x+x-1)=0$，

令 $f(x)=xe^x-m(\ln x+x-1)$，则 $f'(x)=(x+1)\left(e^x-\frac{m}{x}\right)$.

当 $m\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，故 $f(x)$ 至多只有1个零点；

当 $m>0$ 时，令 $e^x-\frac{m}{x}=0$，设 x_0 为该方程的解，

故当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x_0)=x_0e^{x_0}-m(\ln x_0+x_0-1)<0$；

而 $e^{x_0}-\frac{m}{x_0}=0$，故 $x_0e^{x_0}=m$，故 $\ln x_0+x_0=\ln m$.

故 $f(x_0)=m(2-\ln m)<0$，解得 $m>e^2$，可知 $x_0>1$，故 $f(1)=e-m+m=e>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上仅有1个零点，

当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，故 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上也有1个零点，

故实数 m 的取值范围为 $(e^2,+\infty)$，故选B.

二、填空题

13.【答案】-896.

【命题立意】本题考查二项式定理，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，有 $(-2)^n=256$，则 $n=8$，

故 $\left(2x^{\frac{2}{5}}-\frac{4}{x^4}\right)^8$ 的展开式的通项公式 $T_{r+1}=C_8^r\cdot(2x^{\frac{2}{5}})^{8-r}\cdot\left(-\frac{4}{x^4}\right)^r=C_8^r\cdot 2^{8-r}\cdot(-4)^r\cdot x^{\frac{16-22r}{5}}$，

令 $\frac{16-22r}{5}=-10$，解得 $r=3$，故 $a=C_8^3\cdot 2^5\cdot(-4)^3$，$\frac{a}{128}=-896$.

14.【答案】1296.

【命题立意】本题考查等差数列的基本运算，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}=n$，

故当 $n=1$ 时，$a_1=1$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n-1}=n-1$，

两式相减可得 $\frac{a_n}{n}=1$，则 $a_n=n,n\in\mathbf{N}^*$，

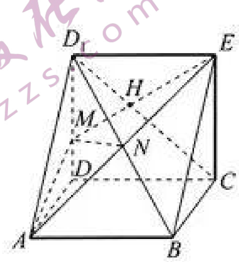
而 $a_{k+1}^2=\frac{S_2}{3}\cdot S_{k+3}$，故 $(k+1)^2=\frac{(k+3)(k+4)}{2}$，解得 $k=5$（$k=-2$ 舍去），

而 $b_1=\frac{S_2}{3}=1,b_2=a_6=6$，故 $b_5=6^4=1296$.

15.【答案】$\frac{2}{5}$.

【命题立意】本题考查空间几何体的位置关系，考查数学运算的核心素养.

【解析】如图所示，由底面 $ABCD$ 是平行四边形，可将四棱锥 D_1-$ABCD$ 补成三棱柱 ADD_1-BCE，易知 $AB/\!/DC/\!/D_1E$，且 $AB=DC=D_1E$.



因为 N 是 BD_1 的中点，所以延长 AN 必过点 E.

连接 ME，由题意易知 ME 必交 D_1C 于点 H.

因为在三棱柱 ADD_1 BCE 中，四边形 CDD_1E 为平行四边形，

所以$\triangle MD_1H\backsim\triangle ECH$，

又因为 M 是棱 DD_1 上靠近点 D 的三等分点，所以$\frac{D_1H}{HC}=\frac{D_1M}{CE}=\frac{2}{3}$，

则$\frac{D_1H}{D_1C}=\frac{2}{5}$.

16.【答案】$\sqrt{13}$或$\frac{5\sqrt{29}}{3}$.

【命题立意】本题考查抛物线的方程与性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意可知抛物线 $C:x^2=4y$.

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则 $y_1=\frac{1}{4}x_1^2,y_2=\frac{1}{4}x_2^2$.

由 $y=\frac{1}{4}x^2$，得 $y'=\frac{1}{2}x$，所以点 P 处的切线方程为 $y-y_1=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)$.

将 $A(a,a-5)$代入，得 $a-5-y_1=\frac{1}{2}x_1(a-x_1)$，即 $x_1^2-2ax_1+4(a-5)=0$.

同理可得 $x_2^2-2ax_2+4(a-5)=0$.

所以 x_1,x_2 是方程 $x^2-2ax+4(a-5)=0$ 的两个解，故 $x_1+x_2=2a$，① $x_1x_2=4(a-5)$，②

所以直线 PQ 的斜率 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{4}=\frac{1}{2}a$，

由$\frac{|PQ|}{|PA|}=2$，得 $\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=2\sqrt{1+\frac{1}{4}x_1^2}\,|x_1-a|$，

由①得$|x_1-x_2|=2|x_1-a|$，所以$\sqrt{1+\frac{1}{4}a^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}x_1^2}$，化简得 $x_1^2=a^2$.

因为 $x_1\neq a$，所以 $x_1=-a$. ③

由①②③，得 $3a^2+4a-20=0$，解得 $a_1=2,a_2=-\frac{10}{3}$，

故点 A 的坐标为$(2,-3)$或$\left(-\frac{10}{3},-\frac{25}{3}\right)$，

故$|AO|=\sqrt{13}$或$\frac{5\sqrt{29}}{3}$.

三、解答题

17.【命题立意】本题考查频率分布直方图、样本的数字特征、离散型随机变量的分布列以及数学期望、二项分布，考查数学运算、逻辑推理、直观想象、数学建模的核心素养.

【解析】(1)依题意，$(0.00003\times2+a+0.00015+0.00020)\times2000=1$，

解得 $a=0.00009$， ……………………………………………………………………… (2分)

故所求的平均值为 $1000\times0.3+3000\times0.4+5000\times0.18+7000\times0.06+9000\times0.06=3360$. ………（5 分）

(2)依题意，$X\sim B\left(4,\frac{2}{5}\right)$，

故 $P(X=0)=\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{81}{625}$，$P(X=1)=C_4^1\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{216}{625}$，

$P(X=2)=C_4^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{216}{625}$，$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{96}{625}$，

$P(X=4)=\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}$，………………………………（9 分）

得 X 的分布列如下：来源：高三答案公众号

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{81}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$

………………………………（10 分）

故 $E(X)=4\times\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$. ………………………………（12 分）

18.【命题立意】本题考查正弦定理、余弦定理、三角形的面积公式、基本不等式，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)依题意，$b\sin A-\sin B\sqrt{\frac{3}{\sin^2C}}=0$， ………………（2 分）

因为 $\sin C>0$，故 $b\sin A\sin C-\sqrt{3}\sin B=0$. ………………（3 分）

由正弦定理，$b\sin A=a\sin B$，故上式可化为 $a\sin B\sin C-\sqrt{3}\sin B=0$，………………（4 分）

因为 $\sin B\neq0$，故 $a\sin C=\sqrt{3}$，由正弦定理，得 $c\sin A=a\sin C=\sqrt{3}$. ………………（5 分）

(2)因为 $2(b\sin C-a\tan C)=c\tan C$，

由正弦定理，$2\left(\sin B\sin C-\sin A\cdot\frac{\sin C}{\cos C}\right)=\sin C\cdot\frac{\sin C}{\cos C}$，………………（6 分）

因为 $\sin C\neq0$，故 $2\cos C\cdot\sin B=2\sin A+\sin C=2\sin(B+C)+\sin C$，………………（7 分）

则 $2\cos C\cdot\sin B=2\sin B\cos C+2\cos B\sin C+\sin C$，故 $2\cos B\sin C+\sin C=0$，

因为 $\sin C\neq0$，故 $\cos B=-\frac{1}{2}$，又 $B\in(0,\pi)$，故 $B=\frac{2\pi}{3}$，………………（9 分）

代入 $b\sin A\sin C-\sqrt{3}\sin B=0$ 中，得 $b\sin A\sin C=2\sin^2B$，即 $ac=2b$，………………（10 分）

由余弦定理，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\geqslant3ac=6b$，故 $b\geqslant6$，

则 $ac\geqslant12$，当且仅当 $a=c=2\sqrt{3}$ 时等号成立；

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B\geqslant3\sqrt{3}$，故实数 λ 的取值范围为 $(-\infty,3\sqrt{3}]$. ………………（12 分）

19.【命题立意】本题考查空间线面的位置关系、向量法求空间角，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)如图，连接 BM，因为 $SB\perp AB$，平面 $SBA\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $SBA\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$SB\subset$ 平面 SBA，故 $SB\perp$ 平面 $ABCD$，………………（1 分）

而 $AC\subset$ 平面 $ABCD$，故 $SB\perp AC$. ………………（2 分）

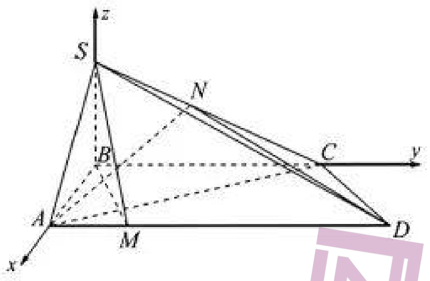
由平面几何知识可知 $BC=2\sqrt{3}$，故 $\frac{AM}{AB}=\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

故 $\triangle ABM\backsim\triangle BCA$，故 $\angle ABM=\angle BCA$，故 $AC\perp BM$.

而 $SB\cap BM=B$，故 $AC\perp$ 平面 SBM，………………（4 分）

因为 $SM\subset$ 平面 SBM，故 $AC\perp SM$. ………………………………………………………………………… (5 分)

(2)由(1)得 $SB\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\perp BC$，故以 B 为原点，BA，BC，BS 所在直线分别为 x、y、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.



易得 $A(1,0,0)$，$C(0,2\sqrt{3},0)$，$D(1,3\sqrt{3},0)$，$S(0,0,\sqrt{3})$， ………………………………………… (6 分)

所以 $\overrightarrow{SC}=(0,2\sqrt{3},-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AS}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AD}=(0,3\sqrt{3},0)$.

设 $\overrightarrow{SN}=\lambda\overrightarrow{SC}=(0,2\sqrt{3}\lambda,-\sqrt{3}\lambda)$，$\lambda\in[0,1]$，

则 $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SN}=(-1,2\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$.

设平面 ADN 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AN}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}3\sqrt{3}y=0,\\ -x+2\sqrt{3}\lambda y+(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)z=0,\end{cases}$ 取 $z=1$，得 $x=\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda$，

则平面 ADN 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,0,1)$. ………………………………………… (8 分)

又因为平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，平面 ADN 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$，

………………………………………………………………………………………… (9 分)

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{3(1-\lambda)^2+1}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，解得 $\lambda=\frac{1}{3}$ ($\lambda=\frac{5}{3}$ 舍去)， ………… (11 分)

故 $SN=\frac{1}{3}SC=\frac{\sqrt{15}}{3}$. ………………………………………………………………… (12 分)

20.【命题意图】本题考查椭圆的方程、直线与椭圆的综合性问题，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)设 $P(x_1,y_1)$，椭圆 C 的左、右顶点坐标分别为 $(-a,0)$，$(a,0)$，

故 $\frac{y_1}{x_1-a}\cdot\frac{y_1}{x_1+a}=\frac{y_1^2}{x_1^2-a^2}=\frac{b^2\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)}{x_1^2-a^2}=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{2}$， ………………………………………… (2 分)

故 $a^2=2b^2$，则 $c^2=a^2-b^2=b^2$. ………………………………………………………………… (3 分)

而 $a-c=\sqrt{2}b-b=\sqrt{6}-\sqrt{3}$，解得 $b=\sqrt{3}$，则 $a=\sqrt{6}$， ………………………………………… (4 分)

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………………………… (5 分)

(2)联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=\frac{1}{2}x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\ y=1,\end{cases}$ 即 $A(2,1)$. ………………………………………… (6 分)

由题意可知 $\angle PAQ$ 的内角平分线的斜率不存在，即该角平分线与 x 轴垂直，

设直线 AP 的斜率为 k，则直线 AQ 的斜率为 $-k$，

设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,直线 AP 的方程为 $y-1=k(x-2)$,即 $y=kx+1-2k$,

联立方程组$\begin{cases} y=kx+1-2k, \\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 消去 y 得 $(2k^2+1)x^2+4k(1-2k)x+8k^2-8k-4=0$, ……………(8 分)

因为 P,A 为直线 AP 与椭圆的交点,所以 $2x_1=\dfrac{8k^2-8k-4}{2k^2+1}$,即 $x_1=\dfrac{4k^2-4k-2}{2k^2+1}$, ……………(9 分)

把 k 换为 $-k$,得 $x_2=\dfrac{4k^2+4k-2}{2k^2+1}$,所以 $x_2-x_1=\dfrac{8k}{2k^2+1}$, ……………(10 分)

所以 $y_2-y_1=(-kx_2+1+2k)-(kx_1+1-2k)=k[4-(x_1+x_2)]=\dfrac{8k}{2k^2+1}$, ……………(11 分)

所以直线 PQ 的斜率 $k_{PQ}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=1$,故直线 PQ 的斜率为定值 1. ……………(12 分)

21.【命题立意】本题考查利用导数研究函数的性质,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)令 $f(x)=0$,得 $m(\ln x-1)=x$,

显然 $m\neq 0$,故 $\dfrac{\ln x-1}{x}=\dfrac{1}{m}$. ……………(1 分)

令 $g(x)=\dfrac{\ln x-1}{x}$,则 $g'(x)=\dfrac{2-\ln x}{x^2}$, ……………(2 分)

令 $g'(x)=0$,解得 $x=e^2$,故当 $x\in[3,e^2)$ 时,$g'(x)>0$,当 $x\in(e^2,9]$ 时,$g'(x)<0$,

故函数 $g(x)$ 在 $[3,e^2)$ 上单调递增,在 $(e^2,9]$ 上单调递减, ……………(3 分)

而 $g(3)=\dfrac{\ln 3-1}{3}$,$g(9)=\dfrac{\ln 9-1}{9}=\dfrac{2\ln 3-1}{9}$,$g(e^2)=\dfrac{\ln e^2-1}{e^2}=\dfrac{1}{e^2}$, ……………(4 分)

因为 $g(3)<g(9)$,所以实数 $\dfrac{1}{m}$ 的取值范围为 $\left[\dfrac{2\ln 3-1}{9},\dfrac{1}{e^2}\right)$.

故 m 的取值范围为 $\left(e^2,\dfrac{9}{2\ln 3-1}\right]$. ……………(5 分)

(2)设 $h(x)=f(x)+m^2-f'(x)-1=mx\ln x-x^2-(m-2)x+m^2-1-m\ln x(x\geqslant 1)$, ……………(6 分)

故 $h'(x)=m\ln x-2x+2-\dfrac{m}{x}(x\geqslant 1)$, ……………(7 分)

故 $h''(x)=m\cdot\dfrac{1}{x}-2+\dfrac{m}{x^2}=m\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)-2(x\geqslant 1)$, ……………(8 分)

因为 $h(1)=m(m-1)\leqslant 0$,所以 $0\leqslant m\leqslant 1$, ……………(9 分)

当 $0\leqslant m\leqslant 1$ 时,$\forall x\in[1,+\infty)$,$h''(x)=m\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)-2\leqslant m\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1^2}\right)-2\leqslant 0$,

故 $h'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减, ……………(10 分)

故 $\forall x\in[1,+\infty)$,$h'(x)<h'(1)=-m\leqslant 0$,

从而 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减,故 $\forall x\in[1,+\infty)$,$h(x)\leqslant h(1)\leqslant 0$,

故实数 m 的取值范围为 $[0,1]$. ……………(12 分)

22.【命题立意】本题考查直线的参数方程、曲线的极坐标方程的转化及其应用,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)依题意,曲线 $C_1:x^2+(y-\sqrt{3})^2=3$,故 $x^2+y^2=2\sqrt{3}y$,

即 $\rho^2=2\sqrt{3}\rho\sin\theta$,故曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{3}\sin\theta$, ……………(2 分)

而曲线 $C_2:\rho^2=2\rho\cos\theta$,即 $x^2+y^2-2x=0$,即 $(x-1)^2+y^2=1$,

故曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+\cos\gamma, \\ y=\sin\gamma \end{cases}$($\gamma$ 为参数). ……………(4 分)

(2)设曲线 C_3 的参数方程为$\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\y=t\sin\alpha\end{cases}$($t$ 为参数,且 $t\neq0$),

代入曲线 C_1 的直角坐标方程可得 $t^2-2\sqrt{3}t\sin\alpha=0$,

故 $t_P=2\sqrt{3}\sin\alpha$,同理可得,$t_Q=2\cos\alpha$, ………………………………………………………… (7 分)

所以 $|PQ|=|t_P-t_Q|=|2\sqrt{3}\sin\alpha-2\cos\alpha|=4\left|\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right|$,

因为 $0<\alpha<\pi$ 且 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$,故当 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$时,$|PQ|$有最大值,

此时曲线 C_3:$\sqrt{3}x+y=0$, ………………………………………………………………………………… (9 分)

故曲线 C_2 上的点到曲线 C_3 距离的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{2}+1$. …………………………………………………… (10 分)

23.【命题立意】本题考查不等式的解法、绝对值三角不等式的性质,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意得$\begin{cases}\left|-\frac{1}{3}m-2\right|=3,\\\left|\frac{5}{3}m-2\right|=3,\end{cases}$解得 $m=3$, ………………………………………………… (1 分)

故 $f(x)>6$ 等价于 $|3x-2|+|2x+1|>6$.

若 $x<-\frac{1}{2}$,则 $2-3x-2x-1>6$,解得 $x<-1$,故 $x<-1$; ………………………………………… (2 分)

若 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}$,则 $2-3x+2x+1>6$,解得 $x<-3$,故无解; ………………………………… (3 分)

若 $x>\frac{2}{3}$,则 $3x-2+2x+1>6$,解得 $x>\frac{7}{5}$,故 $x>\frac{7}{5}$. ……………………………………………… (4 分)

故不等式 $f(x)>6$ 的解集为$\left\{x\middle|x<-1\text{ 或 }x>\frac{7}{5}\right\}$. …………………………………………… (5 分)

(2)因为 $f(x)-|4x+2|<\lambda$,故 $|3x-2|-|2x+1|<\lambda$. ……………………………………………… (6 分)

令 $g(x)=|3x-2|-|2x+1|=\begin{cases}x-3\left(x\geqslant\frac{2}{3}\right),\\1-5x\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{2}{3}\right),\\3-x\left(x\leqslant-\frac{1}{2}\right),\end{cases}$

可知 $g(x)_{\min}=g\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{7}{3}$, ……………………………………………………………………… (9 分)

故 $\lambda>-\frac{7}{3}$,即实数 λ 的取值范围为$\left(-\frac{7}{3},+\infty\right)$. ………………………………………… (10 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。