

2018~2019 学年度第二学期高三年级六调考试

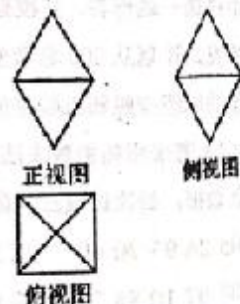
理科数学试卷

一、选择题（每小题5分，共60分。下列每小题所给选项只有一项符合题意，请将正确答案的序号填涂在答题卡上）

- 已知 $x, y \in R$, i 为虚数单位, 且 $(x-2)i - y = -1 + i$, 则 $(1+i)^{x+y}$ 的值为 ()
A. 4 B. $4+4i$ C. -4 D. $2i$
- 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 6 \geq 0\}$, 则下列结论中正确的是 ()
A. $A \cap B = B$ B. $A \cup B = A$ C. $A \subseteq B$ D. $C_R A = B$
- 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 2, 在 $\triangle ABC$ 所在的平面内有两点 P, Q , 满足 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{QA} = 2\overrightarrow{BQ}$, 则 $\triangle APQ$ 的面积为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 1

- 如图, 一个空间几何体的正视图、侧视图都是面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 一个内角为 60° 的菱形, 俯视图为正方形, 那么这个几何体的表面积为



- A. $2\sqrt{3}$ B. $4\sqrt{3}$ C. 8 D. 4

- 七巧板是我国古代劳动人民的发明之一, 被誉为“东方模板”, 它是由五块等腰直角三角形、一块正方形和一块平行四边形共七块板组成的. 如图所示的是一个用七巧板拼成的正方形, 若在此正方形中任取一点, 则此点取自黑色部分的概率为 ()



- A. $\frac{3}{16}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{16}$ D. $\frac{7}{16}$

- 定义运算: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_1 a_4 - a_2 a_3$, 将函数 $f(x) = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & \cos \frac{x}{2} \\ 1 & \sin \frac{x}{2} \end{vmatrix}$ 的图像向左平移 m ($m > 0$) 个

单位, 所得图像对应的函数为偶函数, 则 m 的最小值是 ()

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{4\pi}{3}$ D. $\frac{7\pi}{3}$

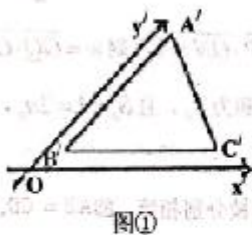
7. 已知 $a=3\ln 2^3$, $b=2\ln 3^3$, $c=3\ln \pi^2$, 则下列选项正确的是 ()

- A. $a > b > c$ B. $c > a > b$ C. $c > b > a$ D. $b > c > a$

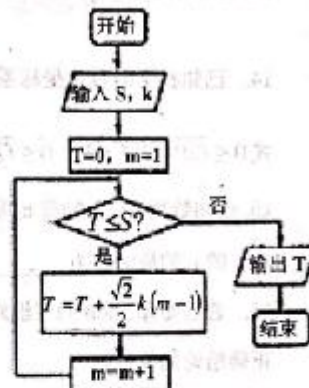
8. 双曲线 C 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 且 F_2 恰为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, 设双曲线 C 与该抛物线的一个交点为 A , 若 $\triangle AF_1F_2$ 是以 AF_1 为底边的等腰三角形, 则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $1 + \sqrt{2}$
C. $1 + \sqrt{3}$ D. $2 + \sqrt{3}$

9. 如图①, 利用斜二侧画法得到水平放置的 $\triangle ABC$ 的直观图 $\triangle A'B'C'$, 其中 $A'B' \parallel y'$ 轴, $B'C' \parallel x'$ 轴. 若 $A'B' = B'C' = 3$, 设 $\triangle ABC$ 的面积为 S , $\triangle A'B'C'$ 的面积为 S' , 记 $S = kS'$, 执行如图②的框图, 则输出 T 的值



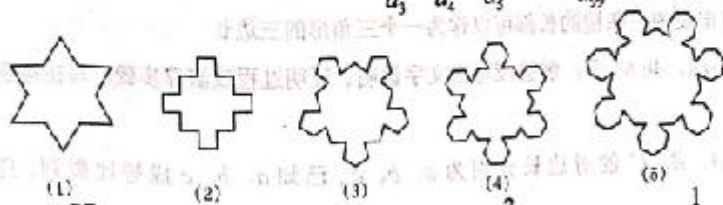
图①



图②

- A. 12 B. 10 C. 9 D. 6

10. 如下图, 第 (1) 个多边形是由正三角形“扩展”而来, 第 (2) 个多边形是由正方形“扩展”而来, …… 如此类推. 设由正 n 边形“扩展”而来的多边形的边数为 a_n , 则 $\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \dots + \frac{1}{a_{99}}$ = ()



- (A) $\frac{97}{300}$; (B) $\frac{97}{100}$; (C) $\frac{3}{100}$; (D) $\frac{1}{100}$

11. 过椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上一点 M 作圆 $x^2 + y^2 = 2$ 的两条切线, 点 A, B 为切点. 过 A, B 的直线 l 与 x 轴, y 轴分别交于点 P, Q 两点, 则 $\triangle POQ$ 的面积的最小值为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. 1 D. $\frac{4}{3}$

12. 若函数 $f(x)$ 在其图象上存在不同的两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 其坐标满足条件:

高三数学 (理科) 第2页 (共6页)

$|x_1x_2 + y_1y_2| - \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ 的最大值为 0, 则称 $f(x)$ 为“柯西函数”, 则下列函数: ① $f(x) = x + \frac{1}{x} (x > 0)$; ② $f(x) = \ln x (0 < x < e)$; ③ $f(x) = \cos x$; ④ $f(x) = x^2 - 4$.

其中为“柯西函数”的个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题 (每题5分, 共20分. 把答案填在答题纸的横线上)

13. 若等比数列 $\{a_n\}$ 的第5项是二项式 $(\sqrt{x} - \frac{1}{3x})^6$ 展开式的常数项, 则 $a_3 a_7 =$ _____

14. 已知在平面直角坐标系中, $O(0,0)$, $M(1, \frac{1}{2})$, $N(0,1)$, $Q(2,3)$, 动点 $P(x,y)$ 满足不等式 $0 \leq \overline{OP} \cdot \overline{OM} \leq 1$, $0 \leq \overline{OP} \cdot \overline{ON} \leq 1$, 则 $w = \overline{OQ} \cdot \overline{OP}$ 的最大值为 _____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n + 1 = 2a_n$, 则使不等式 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 < 5 \times 2^{n+1}$ 成立的 n 的最大值为 _____.

16. 若四面体 ABCD 的三组对棱分别相等, 即 $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$, 则 _____ (写出所有正确结论的编号)

- ①四面体 ABCD 每个面的面积相等
- ②四面体 ABCD 每组对棱相互垂直
- ③连接四面体 ABCD 每组对棱中点的线段相互垂直平分
- ④从四面体 ABCD 每个顶点出发的三条棱的长都可以作为一个三角形的三边长

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 62 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤, 写在答题纸的相应位置)

17. 设 $\triangle ABC$ 的三内角 A 、 B 、 C 的对边长分别为 a 、 b 、 c , 已知 a 、 b 、 c 成等比数列, 且

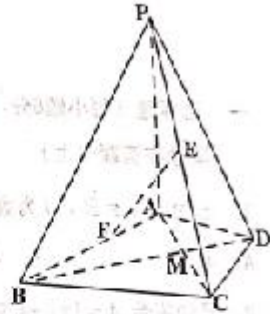
$$\sin A \sin C = \frac{3}{4}.$$

(I) 求角 B 的大小;

(II) 设向量 $\vec{m} = (\cos A, \cos 2A)$, $\vec{n} = (-\frac{12}{5}, 1)$, 当 $\vec{m} \cdot \vec{n}$ 取最小值时, 判断 $\triangle ABC$ 的形状.

18. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $\triangle ABC$ 是正三角形, AC 与 BD 的交点 M 恰好是 AC 中点, 又 $PA=AB=4$, $\angle CDA=120^\circ$.

- (1) 求证: $BD \perp PC$;
- (2) 设 E 为 PC 的中点, 点 F 在线段 AB 上, 若直线 $EF \parallel$ 平面 PAD , 求 AF 的长;
- (3) 求二面角 $A-PC-B$ 的余弦值.



19. 在一次高三年级统一考试中, 数学试卷有一道满分 10 分的选做题, 学生可以从 A、B 两道题目中任意一题作答. 某校有 900 名高三学生参加了本次考试, 为了了解该校学生解答该选做题的得分情况, 计划从 900 名考生的选做题成绩中随机抽取一个容量为 10 的样本, 为此将 900 名考生选做题的成绩按照随机顺序依次编号为 001—900.

(1) 若采用随机数表法抽样, 并按照以下随机数表, 以方框内的数字 5 为起点, 从左向右依次读取数据, 每次读取三位随机数, 一行读数用完之后接下一行左端, 写出样本编号的中位数;

05 26 93 70 60	22 35 85 15 13	92 03 51 59 77	59 56 78 06 83	52 91 05 70 74
07 97 10 88 23	09 98 42 99 64	61 71 62 99 15	06 5 1 29 16 93	58 05 77 09 51
51 26 87 85 85	54 87 66 47 54	73 32 08 11 12	44 95 92 63 16	29 56 24 29 48
26 99 61 65 53	58 37 78 80 70	42 10 50 67 42	32 17 55 85 74	94 44 67 16 94
14 65 52 68 75	87 59 36 22 41	26 78 63 06 55	13 08 27 01 50	15 29 39 39 43

- (2) 若采用系统抽样法抽样, 且样本中最小编号为 008, 求样本中所有编号之和;
- (3) 若采用分层抽样, 按照学生选择 A 题目或 B 题目, 将成绩分为两层, 且样本中 A 题目的成绩有 8 个, 平均数为 7, 方差为 4; 样本中 B 题目的成绩有 2 个, 平均数为 8, 方差为 1. 用样本估计 900 名考生选做题得分的平均数与方差.

20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点 F_1, F_2 , 上顶点为 M , $\angle F_1 M F_2 = 60^\circ$, P 为椭圆上任意一点, 且 $\triangle P F_1 F_2$ 的面积最大值为 $\sqrt{3}$.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 若点 A, B 为椭圆 C 上的两个不同的动点, 且 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = t$ (O 为坐标原点), 则是否存在常数 t , 使得 O 点到直线 AB 的距离为定值? 若存在, 求出常数 t 和这个定值; 若不存在, 请说明理由.

21. 已知函数 $f(x) = a \ln x - x^2$.

(1) 令 $g(x) = f(x) + ax$, 若 $y = g(x)$ 在区间 $(0, 3)$ 上不单调, 求 a 的取值范围;

(2) 当 $a = 2$ 时, 函数 $h(x) = f(x) - mx$ 的图象与 x 轴交于两点 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$, 且 $0 < x_1 < x_2$, 又 $h'(x)$ 是 $h(x)$ 的导函数. 若正常数 α, β 满足条件 $\alpha + \beta = 1, \beta \geq \alpha$, 试比较 $h'(\alpha x_1 + \beta x_2)$ 与 0 的关系, 并给出理由.

请考生在 22、23 三题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分。

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程选讲.

已知平面直角坐标系 xOy , 以 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, P 点的极坐标为

$(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\sqrt{3}\rho \sin \theta = 1$

(I) 写出点 P 的直角坐标及曲线 C 的普通方程;

(II) 若 Q 为 C 上的动点, 求 PQ 中点 M 到直线 $l: \begin{cases} x=3+2t, \\ y=-2+t \end{cases}$ (t 为参数) 距离的最小值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲.

设函数 $f(x) = |x+1| + |x-5|$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 求不等式 $f(x) \leq x+10$ 的解集;

(2) 如果关于 x 的不等式 $f(x) \geq a - (x-2)^2$ 在 \mathbf{R} 上恒成立, 求实数 a 的取值范围.

2018-2019 学年度第二学期六调考试高三理科数学答案

一、选择题 CCCDD CDBAA BB

二、填空题 13. $\frac{25}{9}$ 14. 4 15. 4 16. ①③④

三、解答题

17. 解: (I) 因为 a, b, c 成等比数列, 则 $b^2 = ac$. 由正弦定理得 $\sin^2 B = \sin A \sin C$.

又 $\sin A \sin C = \frac{3}{4}$, 所以 $\sin^2 B = \frac{3}{4}$. 因为 $\sin B > 0$, 则 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$.

又 $b^2 = ac$, 则 $b \leq a$ 或 $b \leq c$, 即 b 不是 $\triangle ABC$ 的最大边, 故 $B = \frac{\pi}{3}$ 5 分

(II) 因为 $\vec{m} \cdot \vec{n} = -\frac{12}{5} \cos A + \cos 2A$,

所以 $\vec{m} \cdot \vec{n} = -\frac{12}{5} \cos A + 2 \cos^2 A - 1 = 2(\cos A - \frac{3}{5})^2 - \frac{43}{25}$. 所以当 $\cos A = \frac{3}{5}$ 时, $\vec{m} \cdot \vec{n}$ 取得最

小值. 此时 $\frac{1}{2} < \cos A = \frac{3}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($0 < A < \pi$), 于是 $\frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{3}$.

又 $B = \frac{\pi}{3} \Rightarrow A + B > \frac{\pi}{2}$, 从而 $\triangle ABC$ 为锐角三角形. 12 分

18. 证明: (1) $\because \triangle ABC$ 是正三角形, M 是 AC 中点,

$\therefore BM \perp AC$, 即 $BD \perp AC$.

又 $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore PA \perp BD$.

又 $PA \cap AC = A$, $\therefore BD \perp$ 平面 PAC .

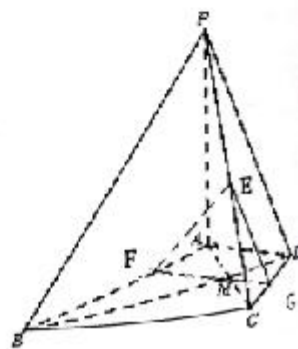
$\therefore BD \perp PC$ 4 分

解: (2) 取 DC 中点 G , 连接 FG , 则 $EG \parallel$ 平面 PAD ,

又直线 $EF \parallel$ 平面 PAD , 所以平面 $EFG \parallel$ 平面 PAD , 所以

$FG \parallel$ 平面 AD

$\because M$ 为 AC 中点, $DM \perp AC$, $\therefore AD = CD$.



$\because \angle ADC=120^\circ, AB=4, \therefore \angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=90^\circ, AD=CD=\frac{4\sqrt{3}}{3},$

$\angle DGF=60^\circ, DG=\frac{2\sqrt{3}}{3},$ 得 $AF=1$ ……8分

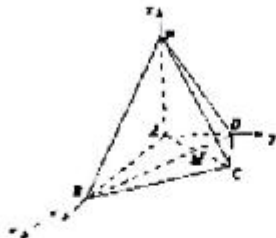
解: (3) 分别以 AB, AD, AP 为 x 轴, y 轴, z 轴建立如图的空间直角坐标系,

$\therefore B(4, 0, 0), C(2, 2\sqrt{3}, 0), D(0, \frac{4\sqrt{3}}{3}, 0), P(0, 0, 4).$

$\vec{DB}=(4, -\frac{4\sqrt{3}}{3}, 0)$ 为平面 PAC 的法向量,

$\vec{PC}=(2, 2\sqrt{3}, -4), \vec{PB}=(4, 0, -4).$

设平面 PBC 的一个法向量为 $\vec{n}=(x, y, z),$



则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{PC}=0 \\ \vec{n} \cdot \vec{PB}=0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x+2\sqrt{3}y-4z=0 \\ 4x-4z=0 \end{cases}$

令 $z=3,$ 得 $x=3, y=\sqrt{3},$ 则平面 PBC 的一个法向量为 $\vec{n}=(3, \sqrt{3}, 3).$

设二面角 $A-PC-B$ 的大小为 $\theta,$ 则 $\cos \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{DB}|}{|\vec{n}| |\vec{DB}|} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$

所以二面角 $A-PC-B$ 余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}.$

……12分

19. 解: (1) 根据题意, 读出的编号依次是:

512, 916 (超界), 935 (超界), 805, 770, 951 (超界), 512 (重复), 687, 858, 554, 876, 547, 547, 332.

将有效的编号从小到大排列, 得

332, 512, 547, 554, 647, 687, 770, 805, 858, 876,

故中位数为 $\frac{547+627}{2} = 667.$ ……4分

(2) 由题易知, 按照系统抽样法, 抽出的编号可组成以 8 为首项, 以 90 为公差的等差数列, 故样本编号之和即为该数列的前 10 项之和 $S_{10} = 10 \times 8 + \frac{10 \times 9}{2} \times 90 = 4130.$ ……6分

(3) 记样本中 8 个 A 题目成绩分别为 $x_1, x_2, \dots, x_8,$ 2 个 B 题目成绩分别为 $y_1, y_2.$

由题意可知 $\sum_{i=1}^8 x_i = 8 \times 7 = 56, \sum_{i=1}^8 (x_i - 7)^2 = 8 \times 4 = 32.$

高三数学 (理科答案) 第2页 (共6页)

$$\sum_{i=1}^2 y_i = 16, \quad \sum_{i=1}^2 (y_i - 8)^2 = 2 \times 1 = 2.$$

$$\text{故样本平均数为 } \frac{\sum_{i=1}^2 x_i + \sum_{i=1}^2 y_i}{8+2} = \frac{36+16}{10} = 7.2.$$

样本方差为

$$\frac{\sum_{i=1}^2 (x_i - 7.2)^2 + \sum_{i=1}^2 (y_i - 7.2)^2}{8+2} = \frac{\sum_{i=1}^2 [(x_i - 7) - 0.2]^2 + \sum_{i=1}^2 [(y_i - 8) + 0.8]^2}{8+2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^2 (x_i - 7)^2 - 0.4 \sum_{i=1}^2 (x_i - 7) + 8 \times 0.2^2 + \sum_{i=1}^2 (y_i - 8)^2 + 1.6 \sum_{i=1}^2 (y_i - 8) + 2 \times 0.8^2}{8+2}$$

$$= \frac{22 - 0 + 0.2 + 0 + 0 + 1.28}{10} = \frac{23.48}{10} = 3.56.$$

故估计该校 900 名考生该题得分的平均数为 7.2，方差为 3.56。……12 分

20. 解：(1) 由题得，
$$\begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot b = \sqrt{3} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 3 \end{cases}.$$

\therefore 椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. ……4 分

(II) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 当直线 AB 的斜率存在时,

设其直线方程为: $y = kx + n$,

则原点 O 到直线 AB 的距离为 $d = \frac{|n|}{\sqrt{k^2+1}}$,

$$\text{联立方程 } \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12 \\ y = kx + n \end{cases},$$

化简得, $(4k^2 + 3)x^2 + 8knx + 4n^2 - 12 = 0$,

由 $d > 0$ 得 $4k^2 - n^2 + 3 > 0$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{-8kn}{4k^2+3}, \quad x_1 x_2 = \frac{4n^2-12}{4k^2+3},$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$= x_1 x_2 + (kx_1 + n)(kx_2 + n)$$

$$= (k^2 + 1)x_1 x_2 + kn(x_1 + x_2) + n^2 = t$$

即 $(7d^2 - 12 - 4t)k^2 + 7d^2 - 12 - 3t = 0$ 对任意的 $k \in \mathbb{R}$ 恒成立,

$$\text{则 } \begin{cases} 7d^2 - 12 - 4t = 0 \\ 7d^2 - 12 - 3t = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0, \quad d = \frac{2\sqrt{21}}{7},$$

当直线 AB 斜率不存在时, 也成立.

故当 $t = 0$ 时, O 点到直线 AB 的距离为定值 $d = \frac{2\sqrt{21}}{7}$. ……12 分

21. 解 (1) 因为 $g(x) = a \ln x - x^2 + ax$, 所以 $g'(x) = \frac{a}{x} - 2x + a$,1分

因为 $g(x)$ 在区间 $(0, 3)$ 上不单调, 所以 $g'(x) = 0$ 在 $(0, 3)$ 上有实数解, 且无重根,

由 $g'(x) = 0$, 有 $a = \frac{2x^2}{x+1} = 2(x+1 + \frac{1}{x+1}) - 4 \in (0, \frac{9}{2})$, ($x \in (0, 3)$)2分

又当 $a = -8$ 时, $g'(x) = 0$ 有重根 $x = -2$,3分

综上 $a \in (0, \frac{9}{2})$ 4分

(2) $h'(a\alpha x_1 + \beta x_2) < 0$

$\because h'(x) = \frac{2}{x} - 2x - m$, 又 $f(x) - mx = 0$ 有两个实根 x_1, x_2 ,

$\therefore \begin{cases} 2 \ln x_1 - x_1^2 - mx_1 = 0 \\ 2 \ln x_2 - x_2^2 - mx_2 = 0 \end{cases}$, 两式相减, 得 $2(\ln x_1 - \ln x_2) - (x_1^2 - x_2^2) = m(x_1 - x_2)$,

$\therefore m = \frac{2(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_1 - x_2} - (x_1 + x_2)$,6分

于是 $h'(a\alpha x_1 + \beta x_2) = \frac{2}{a\alpha x_1 + \beta x_2} - 2(a\alpha x_1 + \beta x_2) - \frac{2(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_1 - x_2} - (x_1 + x_2)$

$= \frac{2}{a\alpha x_1 + \beta x_2} - \frac{2(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_1 - x_2} + (2\alpha - 1)(x_2 - x_1)$.

$\because \beta \geq \alpha, \therefore 2\alpha \leq 1, \therefore (2\alpha - 1)(x_2 - x_1) \leq 0$.

要证: $h'(a\alpha x_1 + \beta x_2) < 0$, 只需证: $\frac{2}{a\alpha x_1 + \beta x_2} - \frac{2(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_1 - x_2} < 0$

只需证: $\frac{x_1 - x_2}{a\alpha x_1 + \beta x_2} - \ln \frac{x_1}{x_2} > 0$. (*)9分

令 $\frac{x_1}{x_2} = t \in (0, 1)$, $\therefore (*)$ 化为 $\frac{1-t}{a\alpha t + \beta} + \ln t < 0$, 只证 $u(t) = \ln t + \frac{1-t}{a\alpha t + \beta} < 0$ 即可. $\because u(t)$ 在 $(0, 1)$

上单调递增, $u(t) < u(1) = 0, \therefore \ln t + \frac{1-t}{a\alpha t + \beta} < 0$, 即 $\frac{x_1 - x_2}{a\alpha t + \beta} + \ln \frac{x_1}{x_2} < 0$.

$\therefore h'(a\alpha x_1 + \beta x_2) < 0$12分

22. 解: (1) 点 P 的直角坐标 $(3, \sqrt{3})$

由 $\rho^2 + 2\sqrt{3}\rho \sin \theta = 1$ 得 $x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}y = 1$, 即 $x^2 + (y + \sqrt{3})^2 = 4$

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 + (y + \sqrt{3})^2 = 4$ 4 分

(2) 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = -\sqrt{3} + 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数) 直线 l 的普通方程为 $x + 2y - 7 = 0$

设 $Q(2\cos\theta, -\sqrt{3} + 2\sin\theta)$, 则 $M\left(\frac{3}{2} + \cos\theta, \sin\theta\right)$ 那么点 M 到直线 l 的距离

$$d = \frac{\left|\frac{3}{2} + \cos\theta - 2\sin\theta - 7\right|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{\left|\cos\theta - 2\sin\theta - \frac{11}{2}\right|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}\sin(\theta - \varphi) + \frac{11}{2}}{\sqrt{5}}$$

$$\geq \frac{-\sqrt{5} + \frac{11}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{10} - 1, \text{ 所以点 } M \text{ 到直线 } l \text{ 的最小距离为 } \frac{11\sqrt{5}}{10} - 1 \quad 10 \text{ 分}$$

23. 解: (1) $f(x) = \begin{cases} -2x+4 & x < -1 \\ 6 & -1 \leq x \leq 5 \\ 2x-4 & x > 5 \end{cases}$ (2 分)

当 $x < -1$ 时, $-2x + 4 \leq x + 10$, $x \geq -2$, 则 $-2 \leq x < -1$;

当 $-1 \leq x \leq 5$ 时, $6 \leq x + 10$, $x \geq -4$, 则 $-1 \leq x \leq 5$;

当 $x > 5$ 时, $2x - 4 \leq x + 10$, $x \leq 14$, 则 $5 < x \leq 14$.

综上所述, 不等式的解集为 $[-2, 14]$. (5 分)

(2) 设 $g(x) = a - (x - 2)^2$, 由函数 $f(x)$ 的图像与 $g(x)$ 的图像可知:

$f(x)$ 在 $x \in [-1, 5]$ 时取最小值为 6, $f(x)$ 在 $x = 2$ 时取最大值为 a ;

若 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 则 $a \leq 6$. (10 分)

自主招生在线 创始于 2014 年, 是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台, 旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵, 关注用户超百万, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生, 引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注自主招生在线官方微信号: **zizzsw**。



微信扫一扫, 快速关注