高三数学参考答案及评分标准

2023.1

一、单项选择题(每小题 5 分,共 40 分)

1.C　2.D　3.B　4.A　5.B　6.C　7.B　8.A

二、多项选择题(每小题 5 分,共 20 分)

9.BCD　10.AB　11.ACD　12.BCD

三、填空题(每小题 5 分,共 20 分)

13. $12\pi^2$　14. 3　15. $x(x+1)(x-1)$(答案不唯一)　16. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

四、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(10 分)

解:(1)因为 $a_{n+1}(a_n+2)=(2a_n+1)(a_n+2)$, ………… 1 分

因为已知 $a_n>0$,

所以 $a_{n+1}=2a_n+1$, ………… 2 分

所以 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$,

所以数列 $\{a_n+1\}$ 是首项为 $a_1+1=2$,公比为 2 的等比数列, ………… 4 分

所以 $a_n+1=2^n$,即 $a_n=2^n-1$. ………… 5 分

(2)结合(1)知 $b_n=(-1)^n\log_4 2^n=(-1)^n\cdot\frac{n}{2}$, ………… 7 分

所以当 n 为偶数时,$T_n=(-\frac{1}{2}+\frac{2}{2})+(-\frac{3}{2}+\frac{4}{2})+\cdots+(-\frac{n-1}{2}+\frac{n}{2})$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n=\frac{1}{4}n.$$

当 n 为奇数时,$T_n=T_{n+1}-b_{n+1}=\frac{n+1}{4}-\frac{n+1}{2}=-\frac{n+1}{4}$.

所以数列 $\{b_n\}$ 的前项和 $T_n=\begin{cases}\frac{-n-1}{4}, & n\text{ 为奇数},\\ \frac{n}{4}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ ………… 10 分

18.(12 分)

解:(1)由已知得 $\cos C(\sin A\cos B-\cos A\sin B)=\cos B(\sin C\cos A-\cos C\sin A)$,

整理得 $2\cos C\sin A\cos B=\cos A\sin A$,因为 $\sin A>0$,所以 $2\cos C\cos B=\cos A$, ………… 2 分

又因为 $\cos A=-\cos(B+C)=-\cos B\cos C+\sin B\sin C$,所以 $\sin B\sin C=3\cos C\cos B$,

即 $\tan B\tan C=3$，…………………………………………………………………… 4 分

$\tan A=-\tan(B+C)=\dfrac{\tan B+\tan C}{\tan B\tan C-1}=\dfrac{\tan B+\tan C}{2}\geqslant\sqrt{\tan B\tan C}=\sqrt{3}$，

当且仅当 $\tan B=\tan C=\sqrt{3}$时等号成立，故 $\tan A$ 的最小值为$\sqrt{3}$. …………………… 6 分

(2)因为 $\tan A=2$，从而 $\tan B+\tan C=4$，又因为 $\tan B\tan C=3$，所以 $\tan C=1$ 或 $\tan C=3$，
……………………………………………………………………………… 8 分

当 $\tan C=1$ 时，$\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，由正弦定理得 $c=\dfrac{a}{\sin A}\sin C=5\sqrt{2}$， …………………… 10 分

当 $\tan C=3$ 时，$\sin C=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，由正弦定理得 $c=\dfrac{a}{\sin A}\sin C=3\sqrt{10}$.

综上，$c=5\sqrt{2}$或 $3\sqrt{10}$. ………………………………………………………… 12 分

19. (12 分)

解：(1)记事件 A 表示“抽取一个小球且为红球”，B_1 表示“箱子中小球为两红两白”，B_2 表示“箱子中小球为三红一白”，

则 $P(A)=P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{12}$. …… 4 分

(2)由题意得 X 的取值可以为 $-2,0,1,3,4,6$，

$P(X=-2)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}$， ………………………………………………… 5 分

$P(X=0)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}$， …………………………………………………… 6 分

$P(X=1)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{24}$， ………………………………… 7 分

$P(X=3)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{48}$， ………………………………… 8 分

$P(X=4)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{24}$， ………………………………… 9 分

$P(X=6)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{48}$. …………………………………………………… 10 分

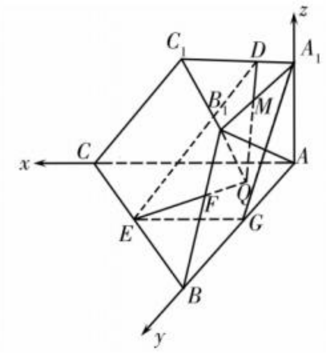
随机变量 X 的分布列为：

X	-2	0	1	3	4	6
P	$\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{11}{24}$	$\dfrac{7}{48}$	$\dfrac{5}{24}$	$\dfrac{1}{48}$

…………………………… 11 分

$E(X)=(-2)\times\dfrac{1}{12}+0\times\dfrac{1}{12}+1\times\dfrac{11}{24}+3\times\dfrac{7}{48}+4\times\dfrac{5}{24}+6\times\dfrac{1}{48}=\dfrac{27}{16}$. …………… 12 分

20.（12 分）



（1）证明：取线段 AB 的中点 G，连接 A_1G，EG，易得 $DA_1 /\!/ EG$，所以 E,G,A_1,D 四点共面.

因为 $AB_1 \perp A_1C_1$，$A_1C_1 /\!/ AC$，所以 $AB_1 \perp AC$，

又因为 $AA_1 \perp$ 底面 ABC，$AC \subset$ 平面 ABC，

所以 $AA_1 \perp AC$，因为 $AB_1 \cap AA_1 = A$，

所以 $AC \perp$ 平面 AA_1B_1B，……………………………… 2 分

因为 E,G 分别是 BC,BA 的中点，

所以 $EG /\!/ AC$，所以 $EG \perp$ 平面 AA_1B_1B，

因为 $AB_1 \subset$ 平面 AA_1B_1B，所以 $AB_1 \perp EG$ ……………………………………………… 3 分

因为 $AA_1 = A_1B_1 = AG = 1$，$A_1B_1 /\!/ AG$，

又因为 $AA_1 \perp AG$，所以四边形 AA_1B_1G 是正方形，所以 $AB_1 \perp A_1G$，…………………… 5 分

又因为 $EG \cap A_1G = G$，所以 $AB_1 \perp$ 平面 A_1DEG，因为 $DE \subset$ 平面 A_1DEG，

所以 $AB_1 \perp DE$. ………………………………………………………………………… 6 分

（2）解：延长 EF 与 C_1B_1 相交于点 Q，连接 DQ，则 DQ 与 A_1B_1 的交点即为 M.

由 F,E 分别为 BB_1 和 BC 的中点知 M 为线段 A_1B_1 的三等分点，且 $A_1M = \frac{2}{3}$，… 8 分

由（1）知 $AC \perp AB$，所以 AC、AB、AA_1 两两垂直，以点 A 为原点，AC 所在的直线为 x 轴，AB 所在的直线为 y 轴，AA_1 所在的直线为 z 轴建立空间直角坐标系 $A-xyz$.

$C(2,0,0)$，$M(0,\frac{2}{3},1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{AM}=(0,\frac{2}{3},1)$，

设平面 MAC 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}2a=0,\\ \frac{2}{3}b+c=0,\end{cases}$ 取 $b=-3$，则 $n_1=(0,-3,2)$ …

……………………………………………………………………………………… 10 分

易得平面 ABC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$， ……………………………………… 11 分

设二面角 $M-AC-B$ 为 θ，$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$，

所以二面角 $M-AC-B$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{13}}{13}$. …………………………………………… 12 分

21. (12 分)

(1)解:由题意知 $c=\sqrt{3}$,所以 $a^2=b^2+3$. ………………………………………………… 1 分

将点 $Q(\sqrt{3},-\frac{1}{2})$代入$\frac{x^2}{b^2+3}+\frac{y^2}{b^2}=1$,解得 $b=1$,

所以椭圆 C 的方程为:$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………………… 2 分

设点 $P(x,y)$,则$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(-\sqrt{3}-x,-y)\cdot(\sqrt{3}-x,-y)=x^2-3+y^2$

$=\frac{3}{4}x^2-2$. ………………………………………………………………………… 3 分

又因为 $x\in[-2,2]$,所以$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$的取值范围是$[-2,1]$. ……………………… 4 分

(2)解:依题意可设直线 l 的方程为 $x=my+\sqrt{3}$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$.

联立$\begin{cases}x=my+\sqrt{3},\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得$(\frac{1}{4}m^2+1)y^2+\frac{\sqrt{3}}{2}my-\frac{1}{4}=0$. ……………………………… 5 分

所以 $y_1+y_2=\frac{-2\sqrt{3}m}{m^2+4}$,$y_1y_2=-\frac{1}{m^2+4}$, ………………………………………………… 6 分

所以 $S_{\triangle F_1MN}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{3}\sqrt{\frac{12m^2}{(m^2+4)}+\frac{4}{m^2+4}}=4\sqrt{3}\sqrt{\frac{m^2+1}{(m^2+4)^2}}$, ……

……………………………………………………………………………………………… 8 分

又因为$\frac{m^2+1}{(m^2+4)^2}=\frac{m^2+1}{(m^2+1)^2+6(m^2+1)+9}=\frac{1}{(m^2+1)+\frac{9}{m^2+1}+6}\leqslant\frac{1}{12}$, …… 9 分

当且仅当 $m=\pm\sqrt{2}$时等号成立.

所以 $S_{\triangle F_1MN}\leqslant4\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{1}{12}}=2$. ………………………………………………… 10 分

又因为三角形内切圆半径 r 满足 $r=\frac{2S_{\triangle F_1MN}}{4a}\leqslant\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$. ……………………………… 11 分

所以$\triangle F_1MN$ 的内切圆面积的最大值为$\frac{\pi}{4}$. ………………………………………… 12 分

22. (12 分)

(1)证明:因为 $a=1$,$f(x)=e^x-x^2-\cos x-\ln(x+1)$,$f(0)=0$; …………………… 1 分

又 $f'(x)=e^x-2x+\sin x-\frac{1}{x+1}$, ……………………………………………………… 2 分

所以 $f'(0)=0$,

所以在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y=0$，

所以函数$f(x)$的图象与x轴相切于坐标原点. ………………………………………… 4 分

(2)解：$f'(x)=e^x-2ax+\sin x-\dfrac{1}{x+1}$，令$g(x)=f'(x)$，

$g'(x)=e^x-2a+\cos x+\dfrac{1}{(x+1)^2}$，令$h(x)=g'(x)$，

$h'(x)=e^x-\sin x-\dfrac{2}{(x+1)^3}$，

当$x\in(-1,0)$时，$h'(x)=e^x-\sin x-\dfrac{2}{(x+1)^3}<1-\sin x-2=-\sin x-1<0$，…… 5 分

故$h(x)$在$(-1,0)$上为减函数，

因为$h(0)=3-2a$，所以当$3-2a\geqslant 0$，即$a\leqslant\dfrac{3}{2}$时，$h(x)\geqslant 0$， …………………… 6 分

所以$g(x)$为增函数，故$g(x)<g(0)=0$，

所以$f(x)$为减函数，故函数$f(x)$在$x\in(-1,0)$无极值点； ……………………… 7 分

当$a>\dfrac{3}{2}$时，当$x\in(-1,0)$，因为$g'(x)$为减函数，

$g'(0)=3-2a<0$，

$g'(-1+\sqrt{\dfrac{1}{2a}})=e^{-1+\sqrt{\frac{1}{2a}}}-2a+\cos(-1+\sqrt{\dfrac{1}{2a}})+2a$

$=e^{-1+\sqrt{\frac{1}{2a}}}+\cos(-1+\sqrt{\dfrac{1}{2a}})>0$，

故必存在$x_0\in(-1,0)$，使得$g'(x_0)=0$，

当$x\in(-1,x_0)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$为增函数，

当$x\in(x_0,0)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$为减函数，

而$f'(0)=0$，故$f'(x_0)>0$，

又因为$f'(-1+\dfrac{1}{e^{2a}})=e^{-1+\frac{1}{e^{2a}}}+2a-\dfrac{2a}{e^{2a}}+\sin(-1+\dfrac{1}{e^{2a}})-e^{2a}$

$=(2a-e^{2a})+e^{-1+\frac{1}{e^{2a}}}-\dfrac{2a}{e^{2a}}+\sin(-1+\dfrac{1}{e^{2a}})$

$<-1+e^{-1+\frac{1}{e^{2a}}}-\dfrac{2a}{e^{2a}}+\sin(-1+e^{\frac{1}{2a}})<0$

所以必存在$m\in(-1,x_0)$，$f'(m)=0$，

且当$x\in(-1,m)$，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数，

当$x\in(m,0)$，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数，

故$f(x)$在区间$(-1,0)$上有一个极小值点m，…………………………………………… 9 分

因为$h'(x)=e^x-\cos x+\frac{6}{(x+1)^4}>0$，

所以$h'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

又因为$h'(0)<0,h'(1)>0$，

所以总存在$x_1\in(0,1)$使$h'(x_1)=0$，

且当$x\in(0,x_1)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，$x\in(x_1,1)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，

当$x\in(0,+\infty)$，$h(0)=3-2a<0$，且$h(2a)=e^{2a}-2a+\cos(2a)+\frac{1}{(2a+1)^2}>1+\cos(2a)+\frac{1}{(2a+1)^2}>0$，

故必存在$x_2\in(0,+\infty)$，使得$g'(x_2)=0$，

$x\in(0,x_2)$，$g'(x)<0$，$f'(x)$为减函数，

$x\in(x_2,+\infty)$，$g'(x)>0$，$f'(x)$为增函数，

因为$f'(0)=0$，所以当$x\in(0,x_2)$，$f'(x)<0$，

即$f'(x_2)<0$，

又因为$f'(4a)=e^{4a}-8a^2+\sin(4a)-\frac{1}{4a+1}$

$>(a+1)^4-8a^2+\sin(4a)-\frac{1}{4a+1}$

$=a^4-2a^2+4a^3+4a+1+\sin(4a)-\frac{1}{4a+1}$

>0

故存在$n\in(x_2,+\infty)$，使得$f'(n)=0$，

且当$x\in(x_2,n)$，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数，

当$x\in(n,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数，

故$f(x)$在区间$(0,+\infty)$有一个极小值点n，…………………………………………… 11 分

所以若函数$f(x)$在区间$(-1,0)$，$(0,+\infty)$各恰有一个极值点，$a>\frac{3}{2}$． ……… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。